

Ordine degli Ingegneri di Lecco

CORSO DI AGGIORNAMENTO PROFESSIONALE

«PROGETTARE EDIFICI IN ZONA SISMICA»

GLI STRUMENTI

MODULO M1

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Ipogea Associati – Torino
ipogea.ass@gmail.com

Lecco 16/03/2017

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

RICORDI DI GEOMETRIA

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

2/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

IL TEOREMA DI TALETE

Talete misura la piramide di Cheope

È possibile misurare l'altezza di un monumento senza salirci sopra? Talete fu il primo a riuscirci nel VI secolo a.C. grazie a una felice intuizione. Egli si accorse, infatti, che la lunghezza di un'ombra proiettata sul terreno dipende dall'altezza dell'oggetto che l'ha originata secondo una relazione matematica ben precisa. In particolare, se si confrontano le ombre di due oggetti diversi, queste stanno tra loro come le altezze degli oggetti corrispondenti:

lunghezza ombra 1 : lunghezza ombra 2 =
= altezza oggetto 1 : altezza oggetto 2

Conoscendo l'altezza di un'asta usata per il confronto e misurando le lunghezze delle ombre sul terreno, Talete fu in grado di determinare l'altezza della piramide.

lunghezza ombra 1 : lunghezza ombra 2 =
= altezza asta : altezza incognita della piramide

$l_1 : l_2 = h_1 : h_2$

da cui: **$h_1 l_2 = h_2 l_1$**

$h_1 = h_2 \cdot \frac{l_1}{l_2}$

Il cosiddetto Teorema di Talete è la formalizzazione di questa intuizione.



TALETE DI MILETO (640 - 547 a.C.)

La piramide di Cheope in Egitto.

Le lunghezze delle ombre sono direttamente proporzionali alle lunghezze degli oggetti che le hanno prodotte.

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

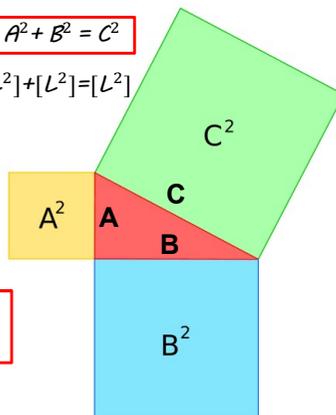
Lecco, 16/03/2017

3/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

IL TEOREMA DI PITAGORA



$A^2 + B^2 = C^2$

$[L^2] + [L^2] = [L^2]$

PITAGORA (570 - 495 a.C.)

$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1$

$[-] + [-] = [-]$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

4/95

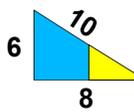
MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

DA TALETE A PITAGORA



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$


$$(2 \times 3)^2 + (2 \times 4)^2 = 2^2 \times (3^2 + 4^2) = 2^2 \times 5^2$$

$$36 + 64 = 100$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$0.6^2 + 0.8^2 = 1$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

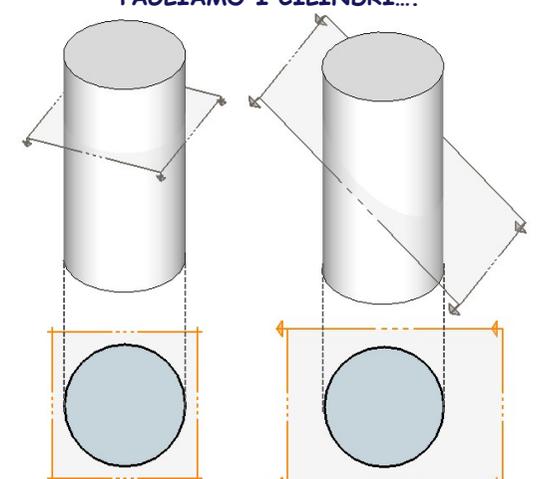
Lecco, 16/03/2017

5/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

TAGLIAMO I CILINDRI...



La vista in pianta è un cerchio, eppure...

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

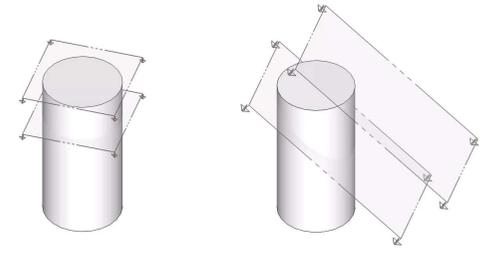
Lecco, 16/03/2017

6/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

CAMBIAMO PUNTO DI VISTA





Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

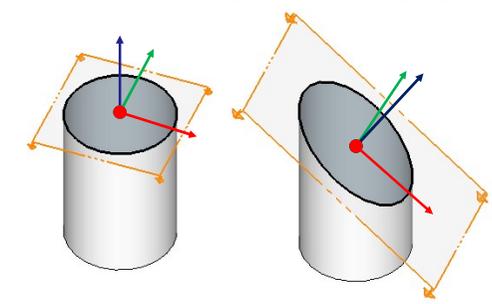
Lecco, 16/03/2017

7/95

MODULO 1

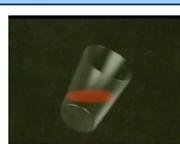
- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Nel sistema «locale» di coordinate...



La sezione è un CERCHIO

La sezione è un'ELLISSE



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

8/95

MODULO 1

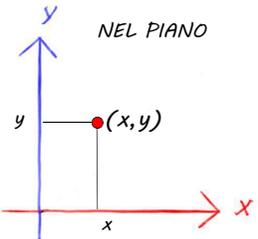
- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

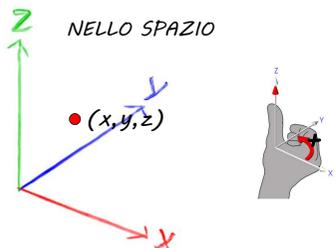
IL «PIANO CARTESIANO»

NEL PIANO



(x, y)

NELLO SPAZIO



(x, y, z)

REGOLA DELLA MANO DESTRA



RENE' DESCARTES «CARTESIO» (1596 - 1650)



9/95

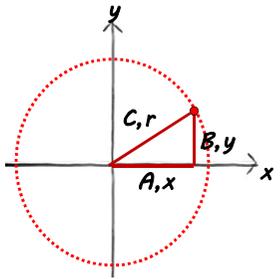
MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

LA CIRCONFERENZA



C, r

B, y

A, x

TEOREMA DI PITAGORA
 $A^2 + B^2 = C^2$

Se C è costante

EQUAZIONE CIRCONFERENZA
 $x^2 + y^2 = r^2$



CIRCONFERENZA: «luogo» dei punti posti alla stessa distanza «r» da un punto detto Centro

10/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

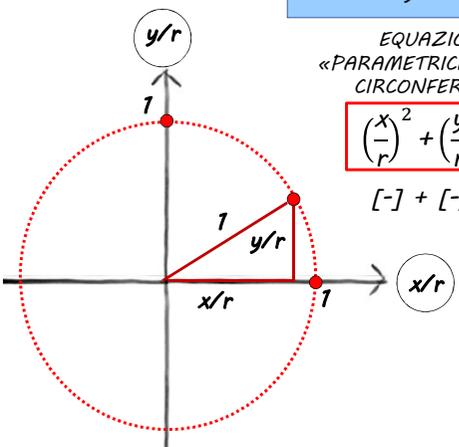
LA CIRCONFERENZA

$x^2 + y^2 = r^2$

EQUAZIONE «PARAMETRICA» DELLA CIRCONFERENZA

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$

$[-] + [-] = [-]$



11/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

L'ELLISSE

E.P. CIRCONFERENZA

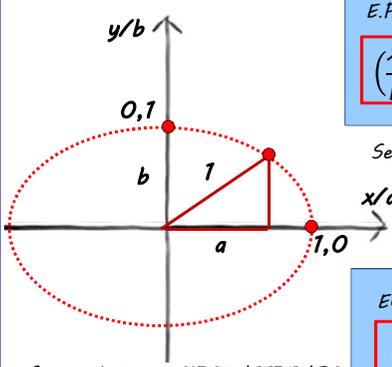
$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$

Se r non è costante e $a \neq b$

EQUAZIONE ELLISSE

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

Se $a = b$ è una CIRCONFERENZA



y/b

$0,1$

b

1

x/a

$1,0$

a

12/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

L'ELLISSE

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

13/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

GRADI E RADIANTI

U. Amaldi - ed. Zanichelli

L'angolo in radianti

Dato un angolo $A\hat{O}B$, la sua ampiezza in radianti si definisce considerando una circonferenza di raggio r centrata nel vertice O e indicando con l la lunghezza dell'arco AB di circonferenza intercettato dall'angolo (figura 16).

L'ampiezza α di un angolo, espressa in radianti, è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco AB e il valore del raggio della circonferenza:

$$\alpha = \frac{l}{r} \quad [-]$$

angolo (rad) lunghezza dell'arco (m) lunghezza della circonferenza (s)

Figura 16 Arco intercettato dall'angolo α .

LUNGHEZZA ARCO DI CIRCONFERENZA

$$l = \alpha \cdot r$$

LUNGHEZZA CIRCONFERENZA

$$C = 2\pi \cdot r$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

14/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

GRADI E RADIANTI

LUNGHEZZA ARCO DI CIRC

$$l = \alpha \cdot r$$

LUNGHEZZA CIRCONFERENZA

$$C = 2\pi \cdot r$$

DA GRADI A RADIANTI

$$\alpha_{rad} : 2\pi = \alpha_{gradi} : 360$$

$$\alpha_{rad} = \pi \frac{\alpha_{gradi}}{180}$$

Angolo α	
[°]	[rad]
90	$0,5 \pi$
180	π
270	$1,5 \pi$
360	2π

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

15/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

SENO, COSENO, TANGENTE (Aryabhata, 476-500 d.C.)

Coordinate dei punti di una circonferenza di raggio R unitario

TEOREMA DI PITAGORA

$$A^2 + B^2 = C^2$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

PER TALETE:

DC : OC = BA : OA
Essendo OA = 1
DC : BC = BA

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

16/95

MODULO 1

SENO, COSENO, TANGENTE (Aryabhata, 476-500 d.C.)

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

17/95

MODULO 1

PENDENZA E INCLINAZIONE

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

$\frac{y}{x} = \text{tg } \alpha$
è la **PENDENZA DEL SEGMENTO DI RETTA**

$\text{tg } 45^\circ = 1 = 100\%$

Un segmento inclinato di 45° ha pendenza **100%**
Un segmento inclinato di 90° ha pendenza infinita

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

18/95

MODULO 1

PENDENZA E INCLINAZIONE

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

$p = 30\% = 0,30$ $\alpha = \text{arctg}(p) = \tan^{-1}(p)$

$\alpha = ?$

pendenza, trovare l'angolo:

$\alpha = \tan^{-1}(p)$

$\alpha = \tan^{-1}(0,3) \cong 17^\circ$

$p = 8\% \quad \alpha = \tan^{-1}(0,08) \cong 4,6^\circ$
 $p = 2\% \quad \alpha = \tan^{-1}(0,02) \cong 1,1^\circ$

APP STORE: Calc Pro
PLAY STORE: Nat-Scientific Calculator

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

20/95

MODULO 1

PENDENZA E INCLINAZIONE

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Inclinazione $\alpha = 20^\circ$
Pendenza 36%

Inclinazione $\alpha = 30^\circ$
Pendenza 58%

Inclinazione $\alpha = 90^\circ$
Pendenza ???

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

21/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

DAL PO AL TICINO...




Il Canale Cavour: lunghezza totale $\cong 83\text{km}$, dislivello $\cong 21\text{m}$ (ogni km, scende di $0,25\text{ m}$)

Pendenza: $(21/83.000) \times 1000 = 0,25\text{‰}$
 $\alpha = \tan^{-1}(0,00025) \cong 0,014^\circ$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco, 16/03/2017

22/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

VELOCITA' E ACCELERAZIONE

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

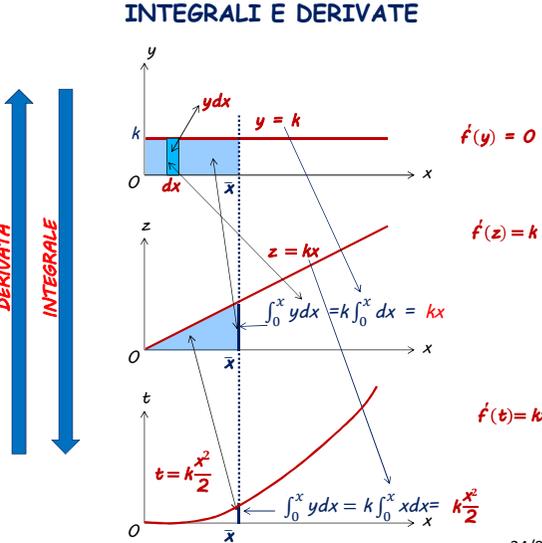
Lecco 16/03/2017

23/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

INTEGRALI E DERIVATE



$f'(y) = 0$

$f'(z) = k$

$f'(t) = kx$

$\int_0^x y dx = k \int_0^x dx = kx$

$\int_0^x z dx = k \int_0^x x dx = k \frac{x^2}{2}$

$\int_0^x t dx = k \int_0^x \frac{x^2}{2} dx = k \frac{x^3}{6}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

24/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

LA VELOCITA'

ESSERE VELOCI = «fare qualcosa» in un tempo contenuto

$VELOCITA' v = \frac{PRESTAZIONE}{TEMPO}$

La rete 4G viaggia a $2,2\text{ Mbyte/sec}$

Ho letto 10 pagine in mezz'ora

Italo va da Torino a Milano (120 km) in 45 minuti.

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

25/95

MODULO 1

- Geometria
- **Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MUOVERSI A VELOCITA' LINEARE COSTANTE

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left[\frac{m}{s} \right]$

Velocità costante
↓
Pendenza costante
↓
Il grafico è una retta

$S = \sum \Delta s = \sum \bar{v} \Delta t = \bar{v} \sum \Delta t = \bar{v} T \quad T = \sum \Delta t$

$\Delta s = \bar{v} \Delta t$

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S}{T} = tg \alpha \quad \text{Velocità MEDIA costante}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

27/95

MODULO 1

- Geometria
- **Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MUOVERSI A VELOCITA' COSTANTE

Per istanti piccolissimi dt

$v = \frac{ds}{dt}$

La velocità è la «derivata» dello spazio rispetto al tempo

$S = \int_0^{\bar{t}} ds = \int_0^{\bar{t}} v dt$

Lo spazio percorso in un dato intervallo \bar{t} è l'**INTEGRALE** (= l'**AREA**) del diagramma della velocità rispetto al tempo.

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

28/95

MODULO 1

- Geometria
- **Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

SPOSTARSI A VELOCITA' VARIABILE

A parità di Δt $\Delta s_1 > \Delta s_2$

$\bar{v}_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} > \bar{v}_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t} \left[\frac{m}{s} \right]$

Velocità variabile
↓
Il grafico diventa una curva

Per istanti piccolissimi di tempo dt $v = \frac{ds}{dt}$

è la pendenza **variabile** della curva («derivata», «gradiente»,)

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

29/95

MODULO 1

- Geometria
- **Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

L'ACCELERAZIONE

Le macchine elettriche forse non emetteranno il rombo di una Ferrari ma quanto a prestazioni sono in grado di fare bene, molto bene. Un team di studenti svizzero delle facoltà di ingegneria dell'ETH Zurich e dell'Università di Lucerna ha raggiunto un **nuovo Guinness World Record** grazie a una macchina da corsa elettrica che ha **accelerato da 0 a 100 km/h in 1,513 secondi**. La vettura ha polverizzato il record precedente fatto segnare dall'Università di Stoccarda di più di un quarto di secondo (1,779 secondi) durante il test che si è svolto presso la base aerea di Dübendorf, vicino a Zurigo, raggiungendo i 100 km/h in 30 metri. La macchina pesa **solo 168 chili** grazie all'uso di materiali in fibra di carbonio, ha **quattro ruote motrici** e un **computer di bordo** che applica il controllo di trazione a ogni singola ruota.

Il tempo messo a segno è di oltre mezzo secondo migliore rispetto alle automobili sportive più quotate (Porsche, Ferrari, ecc.) con motore a benzina e decisamente più veloce delle Tesla, le auto elettriche più "famose" e prestanti

$V = 100 \text{ km/h} = 100 \times 1000 / (60 \times 60) = 27,8 \text{ m/sec}$

$a_{media} = 27,8 / 1,513 = 18 \text{ m/sec}^2$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

30/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

L'ACCELERAZIONE

Cosa succede se, anziché rimanere costante, v aumenta regolarmente nel tempo?



$a = \frac{dv}{dt}$
 $dv = a dt$
 $V = \int_0^t a dt = a \int_0^t dt = a t$
 $a = 10 \times 10 = 100 \text{ m/s}^2$

$a = 100/10 = 10 \text{ m/s}^2$ è la pendenza costante della retta

$v = a t$

s aumenta con il quadrato del tempo

$s = \int_0^t v dt = \int_0^t a t dt = a \int_0^t t dt = \frac{a t^2}{2}$
 $A = 10 \times \frac{100}{2} = 500 \text{ m}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

31/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

5 LA VELOCITÀ ANGOLARE

Torniamo a considerare la stazione spaziale ISS in orbita attorno alla Terra. Mentre la stazione si muove da A a B sulla circonferenza, il raggio vettore spazza un angolo al centro $\Delta\alpha$ (figura 15).

Si definisce **velocità angolare** ω di un moto circolare uniforme il rapporto tra l'angolo al centro $\Delta\alpha$ e il tempo Δt impiegato dal raggio vettore a spazzare tale angolo.

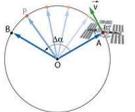


Figura 15 Angolo al centro $\Delta\alpha$.

Per un moto circolare uniforme la velocità angolare vale

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Si definisce **PERIODO e FREQUENZA**

Si definisce **periodo** T di un moto che si ripete sempre uguale dopo un intervallo di tempo T , che si chiama **periodo** del moto.

Si definisce **frequenza** f del moto il numero di periodi che il moto compie nell'unità di tempo.

$$f = \frac{1}{T}$$

Dalla formula qui sopra si capisce che nel Sistema Internazionale la frequenza si misura in s^{-1} (o in 1/s). A questa unità è stato dato il nome **hertz** (simbolo Hz) in onore del fisico tedesco Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894).

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

32/95

MODULO 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione**
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MOTO CIRCOLARE UNIFORME



La frequenza di un evento ripetuto ne misura il numero di accadimenti per unità di tempo.

Lancetta secondi: $T = 60 \text{ s}$ $f = 1/60 = 0,017 \text{ Hz}$
 Lancetta ore: $T = (60 \times 60) \text{ s}$ $f = 1/3600 = 0,00028 \text{ Hz} = 0,28 \text{ mHz}$
 Cuore: 90 battiti/min $f = 90/60 = 1,5 \text{ Hz}$

Frequency	Rotational speed	Angular velocity
Nanohertz	1000000000 Cycle per second	1 Radian per second
Microhertz	1000000 Revolutions per minute	60 Radian per minute
Millihertz	1000 Revolutions per minute	60 Radian per hour
Hertz	1 Beats per minute	60 Radian per day
Kilohertz	10^3	360 Degrees per second
Megahertz	10^6	21600 Degrees per minute
Gigahertz	10^9	1296000 Degrees per hour
Terahertz	10×10^{13}	31104000 Degrees per day

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

33/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità**
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

NEWTON, O DELLA «GRAVITA'»

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

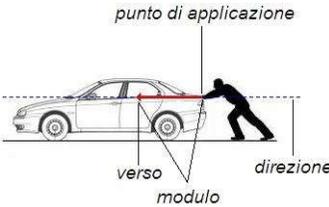
35/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- **La gravità**
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

LE FORZE

FORZA: «freccia orientata», «VETTORE»
 L'effetto di una forza non equilibrata è il «movimento» di un corpo di massa assegnata



Attenzione alla differenza tra direzione e verso...

Le forze si misurano in Newton (N)

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

36/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- **La gravità**
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

I TRE PRINCIPI DELLA DINAMICA (1684)



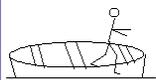
1) **Principio di inerzia**
 Se su un corpo non agiscono forze o agisce un sistema di forze in equilibrio, il corpo persevera nel suo stato di quiete (= sta fermo) o di moto rettilineo uniforme.

2) **Legge fondamentale della dinamica**
 L'accelerazione di un corpo è:

- direttamente proporzionale e nella stessa direzione della forza risultante agente su di esso,
- inversamente proporzionale alla sua massa

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

3) **Principio di azione e reazione**
 Per ogni forza che un corpo A esercita su un altro corpo B, ne esiste istantaneamente un'altra, uguale in modulo e direzione ma opposta in verso, esercitata dal corpo B sul corpo A



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

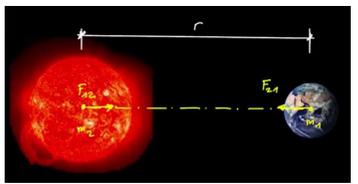
37/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- **La gravità**
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

LA GRAVITA'

Massa = quantità di materia di un corpo, è un invariante che si conserva durante il moto del corpo ($E = mc^2$ Einstein)
 Si misura in kg (massa)



m_T = massa della Terra F_{12} = forza di attrazione Sole - Terra
 m_S = massa del Sole F_{21} = forza di attrazione Terra - Sole
 r = distanza Terra - Sole

NEWTON $F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ Legge di gravitazione universale

costante di gravitazione universale $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

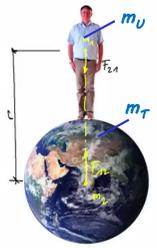
Lecco 16/03/2017

38/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- **La gravità**
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

dalla TERRA...



$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

m_T = massa della Terra = $5,985 \cdot 10^{24}$ kg
 r = raggio della Terra = $6'378'000$ m

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$F_{21} = G \frac{m_T}{r^2} m_U = g \cdot m_U$$

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,985 \cdot 10^{24}}{6378'000^2} = 9,81 \frac{m}{s^2} \approx 10 \text{ m/s}^2$$

g = accelerazione di gravità sulla terra

$F_{21} = P = m_U \cdot g \approx 10 \cdot m_U$
 m_U = massa dell'uomo = 80 kg

$F_{21} = 10 \cdot 80 = 800 \frac{m}{s^2}$

$F_{21} = 800 \text{ N} = 0,8 \text{ kN}$

Le forze si misurano in Newton

$1 \text{ N} \approx 1 \text{ hg} = 0,1 \text{ kg}$
 $1 \text{ kN} = 1000 \text{ N} = 100 \text{ kg}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

39/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

40/95

...alla LUNA



$F = m \cdot a$ 1° PRINCIPIO DI NEWTON

$P = m \cdot g$ FORZA PESO

Sulla terra: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

$P \cong 10 \cdot m$

ma...sulla Luna?

$m_L = \text{massa della Luna} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

$r_L = \text{raggio della Luna} = 1'737'000 \text{ m}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

$g = G \frac{m_L}{r_L^2}$

$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{1'737'000^2} = 1,62 \frac{m}{s^2} \cong \frac{1}{6} \text{ che sulla Terra}$





LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

41/95

MASSA E PESO

Il principio della dinamica $\Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ [N]}$

↓
costante di proporzionalità

MASSA

- grandezza scalare
- propria di ogni corpo
- unità di misura: [kg]

≠

PESO
(«FORZA PESO»)

- grandezza vettoriale
- varia da punto a punto nello spazio
- unità di misura:[N]



$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \text{ [N]}$

↓
Accelerazione di gravità
modulo $\approx 9,8 \text{ m/s}^2$
sulla terra, a livello del mare

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

43/95

FORZE E COPPIE

LEZIONE 1

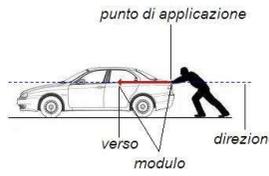
- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

44/95

CORPI CHE SI SPOSTANO



punto di applicazione

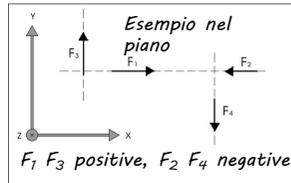
verso direzione

modulo

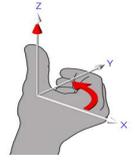
Sistema di riferimento «generale»
orientato con la regola della «mano destra»

Una forza è «positiva» se ha verso concorde con gli assi

Esempio nel piano



F_1, F_3 positive, F_2, F_4 negative



LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

COMPOSIZIONE DI 2 FORZE aventi la stessa retta d'azione

Risultante:

1. Medesima retta d'azione
2. Intensità = somma algebrica dei moduli

$$R = \sum F_i$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

45/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

COMPONENTI DI UNA FORZA

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$= \sqrt{F^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}$$

$$P_1 = P \cdot \cos(\alpha)$$

$$P_2 = P \cdot \sin(\alpha)$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

46/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

COMPONENTI DI UNA FORZA

$$R \sin \alpha = P/2 \Rightarrow R = P/(2 \sin \alpha)$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

47/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

DOM VARIIGNON (1654-1722)

COMPOSIZIONE DI 2 FORZE CONCORRENTI IN UN PUNTO - IL «PARALLELOGRAMMA» DELLE FORZE

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2$$

R = forza risultante, «staticamente equivalente» al sistema di forze

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

48/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

COMPOSIZIONE DI FORZE
non concorrenti in un punto: le successive risultanti

$R_x = \sum F_{xi} = \sum F_i \cos \alpha_i$
 $R_y = \sum F_{yi} = \sum F_i \sin \alpha_i$

Poligono delle forze

Si conosce R, ma dove sta la sua retta d'azione?

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

49/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

CORPI CHE RUOTANO...

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

50/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MOMENTO DI UNA FORZA

Il momento di una forza F rispetto a un punto O è un vettore applicato nel punto O, la cui intensità è pari al PRODOTTO dell'intensità F della forza per il «braccio» b, il segmento che si ottiene proiettando ortogonalmente O sulla retta di azione di F.

$M = Fb$

Il vettore è perpendicolare al piano definito dalla retta d'azione delle forze e dal punto O, il verso è individuato dalla regola della "mano destra".

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

51/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

I MOMENTI

Il momento della forza misura l'«efficacia» di una forza a produrre una rotazione.

Per aprire più facilmente la porta si spinge in un punto il più lontano possibile dai suoi cardini. Nessuna forza, per quanto intensa, riuscirà a far ruotare la porta se esercitata in un punto della retta passante per i cardini.

$F_1 b_1 = F_2 b_2 \quad b_1 > b_2 \quad \Rightarrow \quad F_1 < F_2$

Perché F₂ abbia lo stesso effetto di F₁ deve essere

$F_2 = F_1 b_1 / b_2$

Cosa succede se b₂ → 0 ?

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

52/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

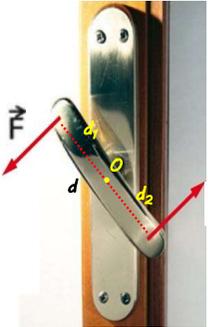
UN SISTEMA DI FORZE PARTICOLARE

Coppia: «sistema di forze» che si può «ridurre» a due sole forze aventi intensità e direzione uguali, versi opposti e rette d'azione distinte. L'effetto di una coppia (non equilibrata) è quello di far RUOTARE un corpo

Il momento di una coppia è la somma dei momenti delle forze del sistema rispetto a un qualsiasi polo O . Indipendente da O , è sempre pari al prodotto dell'intensità F di una delle due forze per la distanza d tra le rette d'azione delle due forze:

$$M = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = Fd$$

Il momento di una coppia è dunque un **vettore libero** = non dipende da polo O rispetto al quale viene calcolato



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

53/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

SISTEMI DI FORZE COMPLANARI
Teorema di Varignon

Il **momento risultante** rispetto a un polo O di un sistema piano di forze «equivalente» (= è «staticamente equivalente») al **momento della risultante R** del sistema dei forze, calcolato rispetto allo stesso polo O .

1) Forze complanari parallele: posizione della retta d'azione della risultante R

• **Intensità:** $R = F_1 + F_2 + F_3 - F_4$

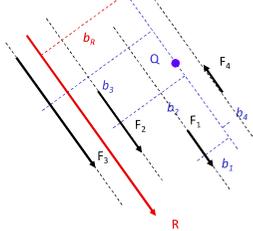
• **Direzione:** la medesima di F_1, F_2, F_3, F_4

Fissato arbitrariamente un polo Q , per il teorema di Varignon:

$$M_{1,Q} + M_{2,Q} + M_{3,Q} + M_{4,Q} = M_{R,Q}$$

$$F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4 = R \cdot b_R$$

$$b_R = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i \cdot b_i}{R}$$



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

54/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

IL TEOREMA DI VARIGNON

2) Forze complanari non parallele: posizione della retta d'azione della risultante R

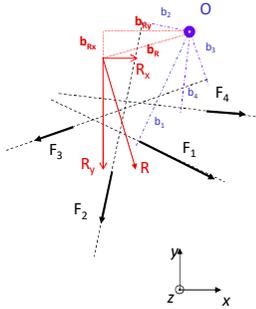
$$F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4 = R \cdot b_R$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \cdot b_i = R \cdot b_R$$

Considerando le componenti secondo x e y di ogni forza e di ogni braccio, con i relativi segni (+, -)

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{ix} \cdot b_{ix} = R_x \cdot b_{Rx}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{iy} \cdot b_{iy} = R_y \cdot b_{Ry}$$



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

55/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

COMPOSIZIONE DI FORZA E COPPIA

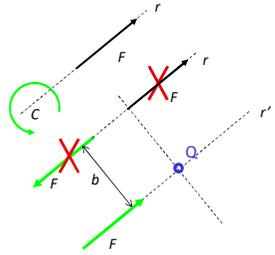
“Invento” un sistema di due sole forze di uguale intensità F ma verso opposto poste a distanza $b = C/F$. Posiziono una delle due forze sulla retta d'azione della forza F in modo da annullarla.

$$\sum F = F$$

$$\sum M = -F \cdot b + F \cdot b = 0$$

La risultante di una coppia C + una forza F è una forza con pari direzione, intensità, verso della forza originaria, agente su una retta d'azione distante $b = C/F$ dalla retta d'azione della forza F .

FORZA + COPPIA = FORZA TRASLATA



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

56/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

«TRASLARE» LE FORZE

Una forza F agente su una retta di direzione r può essere traslata parallelamente su una retta r' posta a distanza b assegnata aggiungendo un sistema equilibrato di due forze F che agiscono lungo r' . Nasce una coppia C di intensità $M = F b$.

$\sum F = F$
 $\sum M = C$

FORZA = FORZA TRASLATA + COPPIA

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

57/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- **Forze e coppie**
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

TRASLARE LE FORZE

«Trasporto» l'azione della ruota di un carroponete la cui via di corsa è sulla mensola di un pilastro fino all'asse del pilastro

$C = -Fb$

C è tanto più grande quanto è più grande il «percorso» b

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

58/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- **Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

L'EQUILIBRIO (STATICO)

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

59/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- **Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

QUANDO SI PERDE L'EQUILIBRIO...

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

60/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

UN CORPO IN EQUILIBRIO NON SI MUOVE (SE LO DICE NEWTON...)

$F_1 = F_2 \rightarrow R = \sum F = 0$

$F = m a \rightarrow a = 0$

Un sistema in equilibrio «non si muove» (PRIMO PRINCIPIO DI NEWTON)

Perché sia $R = 0$ IL POLIGONO DELLE FORZE DEVE ESSERE CHIUSO (l'estremo dell'ultima forza coincide con il punto di inizio della prima forza)

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

62/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

L'EQUILIBRIO DI UNA STRUTTURA NEL PIANO

EQUILIBRI «GLOBALE» e «LOCALI»: I POLIGONI DELLE FORZE DEVONO RISULTARE TUTTI «CHIUSI»

Esempio: i nodi della capriata, sia «esterni» (1) che «interni» (2,3,4)

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

63/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

UN CORPO IN EQUILIBRIO NON RUOTA

$\sum F = 0$
 $\sum M \neq 0$

$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$

è condizione necessaria ma non sufficiente: per l'equilibrio occorre che sia pure

$\vec{\sum M} = 0$

CONDIZIONI PER L'EQUILIBRIO:

Affinché un corpo sia in equilibrio, devono essere NULLE le risultanti sia delle FORZE (= il corpo non si sposta) che dei MOMENTI (= il corpo non ruota).

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

64/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

EQUILIBRIO (STATICO) DI UN SISTEMA DI FORZE

Sistema di forze equilibrato: ha risultante e momento risultante rispetto a un polo qualsiasi entrambi nulli

Equazioni di equilibrio: legano tra loro le forze e le coppie che costituiscono il sistema

RISULTANTE NULLA $\Rightarrow \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \sum$ estesa a tutte le forze del sistema

MOMENTO RISULTANTE NULLO $\Rightarrow \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{A_i} + \sum_{j=1}^m \vec{C}_j = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \sum$ estesa ai momenti di tutte le forze calcolati rispetto ad un polo A qualsiasi e di tutte le coppie del sistema

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

65/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- **Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

EQUILIBRI NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Nello spazio *ognuna delle due equazioni vettoriali può essere scritta sotto forma di tre equazioni scalari*

Equilibrio alla traslazione: 3 equazioni di proiezione su 3 assi ortogonali

Equilibrio alla rotazione: 3 equazioni di momento rispetto ai 3 assi

Nel piano *caso particolare del precedente caso: 2 equazioni di equilibrio alla traslazione 1 equazione di equilibrio alla rotazione*

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{0} \quad \begin{cases} F_{1x} - F_{2x} = 0 \\ F_{1y} - F_{2y} = 0 \end{cases}$$

$$M_R = -F_1 \cdot b + F_2 \cdot b = 0$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

66/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- **Equilibrio**
- Vincoli
- Geometria delle aree

L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

Se la rotazione è tale che la proiezione verticale del centro di gravità «esce» dalla base d'appoggio (c) il corpo cade

Nelle strutture reali la condizione limite si verifica prima della teorica perché si raggiunge la crisi o del materiale della struttura o del materiale su cui la struttura appoggia

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

67/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

69/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

I GRADI DI LIBERTÀ DI UN CORPO

Gradi di libertà (GdL) : i possibili movimenti di un corpo

Nel piano:
• 2 traslazioni
• 1 rotazione \Rightarrow 3 «gradi di libertà»

Nello spazio:
• 3 traslazioni
• 3 rotazioni \Rightarrow 6 «gradi di libertà»

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

70/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

I VINCOLI NEL PIANO
SEMPLICI (tolgono 1 GDL)

VINCOLO	REAZIONE	NUMERO INCONTRATE	SIMBOLO
		1	
		2	
		2	
		3	

DOPPI (tolgono 2 GDL)

TRIPLI (tolgono 3 GDL)

71/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

I VINCOLI NELLA PRATICA

Carrello, appoggio

Cerniera
Waterloo Station Londra

Incastro

72/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

CLASSIFICAZIONE DEI CORPI

$m = \text{gradi di vincolo}$ $n = \text{gradi di libertà}$

Sistema isostatico: i vincoli sono in numero strettamente sufficiente per impedire ogni movimento rigido del corpo ($m = n$)

Sistema iperstatico: i vincoli sono **sovrabbondanti**, si possono togliere senza che si renda possibile alcun movimento rigido ($m > n$)

Sistema labile: i vincoli sono **insufficienti** a impedire un movimento rigido ($m < n$)

73/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

ESEMPI

	Struttura	-1 grado di vincolo
Corpo su semplice appoggio		
Portale (cerniera + carrello)		
Corpo su tre appoggi		

74/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

SISTEMI ANOMALI

Struttura *Interpretazione cinematica*

75/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

STRUTTURE D'ACCIAIO
Terminal dell'aeroporto di Amburgo **Progettista:** Von Gerkan
Strutture: Weber, Poll, Kockjoy

Appoggio **Cerniera** **Incastro**

76/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

STRUTTURE DI CEMENTO ARMATO

Opera: passerella in Garfagnana
Progettista: Ing. Riccardo Morandi

Dettaglio con armatura di una cerniera dei semiarchi

77/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

I VINCOLI INTERNI

Sezione trasversale: arco a tre cerniere

Waterloo station Londra
Progettisti: Grimshaw and Partners
Strutture: Hunt Associates

Cerniera interna

ARCO A TRE CERNIERE:
esternamente iperstatico
(2 cerniera al piede),
globalmente isostatico

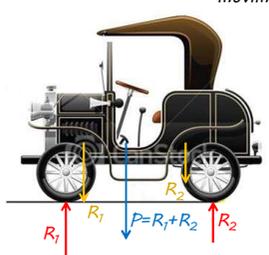
78/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

LE REAZIONI VINCOLARI

Un vincolo impedisce a un corpo di compiere definiti movimenti-

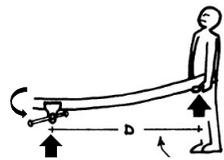


Forze: sono i «carichi» (interni o esterni) applicati a una struttura

Reazioni vincolari: sono le forze trasmesse dai vincoli efficaci che mantengono la struttura in equilibrio

Il terreno impedisce alla vettura di sprofondare - vale il III principio di Newton

La morsa impedisce al pezzo di muoversi e ruotare



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

79/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- **Vincoli**
- Geometria delle aree

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI di strutture isostatiche

la risultante delle forze (interne e esterne, dunque comprese le reazioni vincolari) deve essere nulla. In termini di componenti (X,Y)

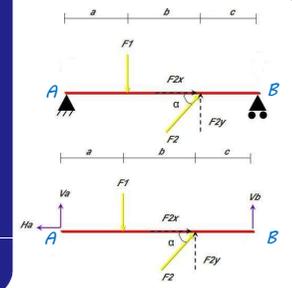
$$\Sigma F_x + \Sigma R_x = 0 \quad \Sigma F_y + \Sigma R_y = 0$$

la risultante dei momenti delle forze deve essere nulla

$$\Sigma M_F + \Sigma M_R = 0$$

3 EQUAZIONI individuano 3 incognite

F1 e F2 forze esterne note - V_a , H_a e V_b reazioni vincolari incognite



$$\begin{aligned} \uparrow V_a + V_b - F_1 + F_{2y} &= 0 \\ \rightarrow F_{2x} - H_a &= 0 \\ \curvearrowright -F_1a + F_{2y}(a+b) + V_b(a+b+c) &= 0 \end{aligned}$$

Le tre equazioni forniscono le reazioni vincolari V_a , H_a e V_b

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

80/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

GEOMETRIA DELLE AREE

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

81/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

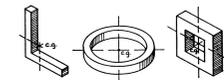
IL BARICENTRO

BARICENTRO = "centro di gravità", punto ideale dove è posizionata la risultante delle masse di un sistema



Hai controllato il baricentro?

Il baricentro può non appartenere al sistema



Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

82/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

BARICENTRO DI MASSE «CONCENTRATE»

$L = 574 \text{ mm}$
 $P_1 = 2,9 \text{ N}$
 $P_2 = 1 \text{ N}$
 $d = 100 \text{ mm (arbitrario)}$

$$P_1 \cdot (L+d) + P_2 \cdot d = R \cdot (x+d)$$

$$R = P_1 + P_2$$

$$P_1 \cdot (L+d) + P_2 \cdot d = (P_1 + P_2) \cdot (x+d)$$

$$2,9 \cdot (574+100) + 1 \cdot 100 = 3,9 \cdot (x + 100)$$

$$1954,6 + 100 = 3,9 \cdot x + 390$$

$$x = \frac{1954,6 + 100 - 390}{3,9} = 427 \text{ mm}$$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

83/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

BARICENTRO DI UN SISTEMA PIANO DI MASSE (massa volumica costante)

$|F_1| = 9b^2 (\rho \rho g)$ $\rho = \text{spessore costante}$
 $|F_2| = 6b^2 (\rho \rho g)$ $\rho = \text{massa volumica costante}$
 $|F_3| = 1/2 b^2 (\rho \rho g)$

Determinare x_G

$R = \Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 = b^2 (9+6+0,5) (\rho \rho g) = 15,5 b^2 (\rho \rho g)$
 $R x_G = -F_1 \frac{3}{2} b - F_2 \frac{7}{2} b - F_3 \frac{11}{3} b = -b^2 (\frac{27}{2} + \frac{42}{2} + \frac{11}{6}) (\rho \rho g) = -\frac{218}{6} b^3 (\rho \rho g)$
 $x_G = \frac{1}{15,5} \frac{218}{6} b^3 \approx 2,3b \text{ non dipende da spessore e massa volumica}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

84/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

MOMENTI STATICI DELLE AREE

Ipotesi; la densità d'area ρ è costante su tutta la superficie, quindi possiamo non indicarla

SEZIONE RETTANGOLARE

$dA = h dx$
 $S_y = \int_0^b x dA = \int_0^b x h dx$
 $S_y = h \frac{b^2}{2} [L^3]$

$dA = b dy$
 $S_x = \int_0^h y dA = \int_0^h y b dy$
 $S_x = b \frac{h^2}{2} [L^3]$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

85/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

IL BARICENTRO

1 ASSE DI SIMMETRIA → Il baricentro appartiene all'asse

2 ASSI DI SIMMETRIA → Il baricentro si trova all'intersezione dei due assi

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

87/95

LEZIONE 1

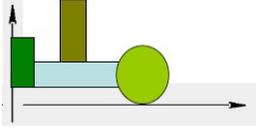
- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

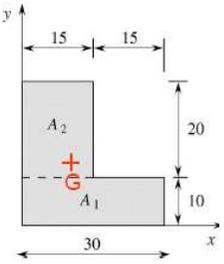
Lecco 16/03/2017

BARICENTRO DI FIGURE COMPOSTE

SUDDIVISIONE DELLA FIGURA COMPLESSA IN FIGURE ELEMENTARI



ESEMPIO:



Momenti statici

Area 1 $\begin{cases} S_{1x} = (30 \cdot 10) \cdot 5 = 1500 \text{ mm}^3 \\ S_{1y} = (30 \cdot 10) \cdot 15 = 4500 \text{ mm}^3 \end{cases}$

Area 2 $\begin{cases} S_{2x} = (15 \cdot 20) \cdot 20 = 6000 \text{ mm}^3 \\ S_{2y} = (15 \cdot 20) \cdot 7.5 = 2250 \text{ mm}^3 \end{cases}$

Coordinate del baricentro

$$x_G = \frac{4500 + 2250}{(300 + 300)} = 11.25 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{1500 + 6000}{(300 + 300)} = 12.50 \text{ mm}$$

88/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

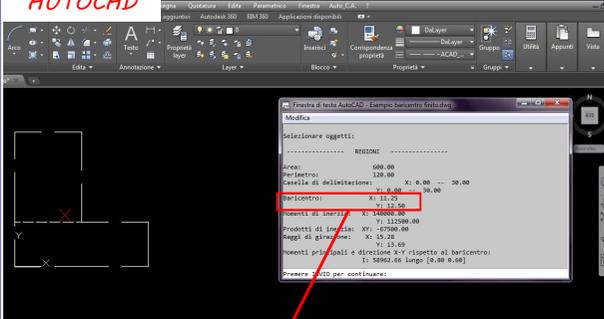
Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

LE PROPRIETA' GEOMETRICHE IN AUTOCAD

Polilinea → comando: REGIONE → comando: PROPMASS

AUTOCAD



Baricentro: [mm] X: 11.25 Y: 12.50

89/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

COSA HANNO IN COMUNE?



90/95

LEZIONE 1

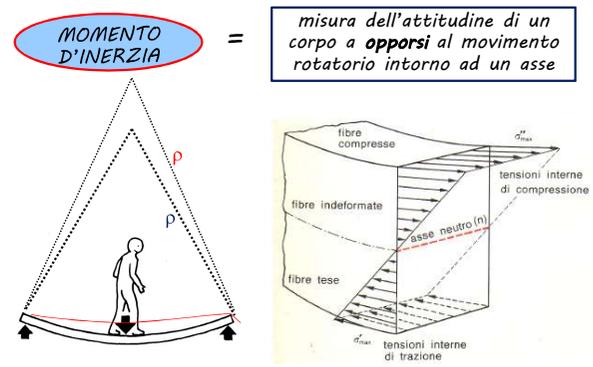
- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

MOMENTI D'INERZIA

MOMENTO D'INERZIA = *misura dell'attitudine di un corpo a opporsi al movimento rotatorio intorno ad un asse*



CURVATURA $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

ρ = raggio di curvatura

MAGGIORE E' IL MOMENTO DI INERZIA, MINORE E' "L'ATTITUDINE A RUOTARE"

91/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MOMENTO D'INERZIA POLARE

$I = m r^2$

$r \uparrow$ $m \uparrow$

Inerzia \uparrow

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

92/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

MOMENTI D'INERZIA ASSIALI

SEZIONE RETTANGOLARE - momento baricentrico

$J_x = \int y^2 \cdot dA \quad [L^4]$
 $J_y = \int x^2 \cdot dA \quad [L^4]$

$J_x = \frac{bh^3}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{12}$ $\frac{J_x}{J_y} = \left(\frac{h}{b}\right)^2$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

93/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

IL «RAGGIO GIRATORE» ρ

VALUTA L'EFFICIENZA DELLE SEZIONI: IN GENERALE A PARITA' D'AREA SONO PIU' "EFFICIENTI" LE SEZIONI CON RAGGIO ρ MAGGIORE

$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad [L]$

$A = \pi R^2$ $J_x = \frac{\pi}{4} R^4$ $J_y = \frac{\pi}{4} R^4$
 $\rho_x = \frac{R}{2}$ $\rho_y = \frac{R}{2}$

$A = \frac{1}{2} bh$ $J_x = \frac{1}{36} bh^3$ $J_y = \frac{1}{36} b^3 h$
 $\rho_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$ $\rho_y = \frac{b}{\sqrt{18}}$

$A = bh$ $J_x = \frac{1}{12} bh^3$ $J_y = \frac{1}{12} b^3 h$
 $\rho_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $\rho_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

94/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree

VARIARE L'ORIENTAMENTO

asse parallelo a b passante per G

$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 2,67 \text{ cm}^4$
 $J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10,67 \text{ cm}^4$
 $\rho_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = 0,58 \text{ cm}$
 $\rho_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{12}} = 1,15 \text{ cm}$
 $A = 8 \text{ cm}^2$

asse parallelo a h passante per G

$J_x = 2,67 \text{ cm}^4$ $J_y = 10,67 \text{ cm}^4$
 $\rho_x = 1,15 \text{ cm}$ $\rho_y = 0,58 \text{ cm}$
 $\frac{I_x}{I_y} = 4$ $\frac{\rho_x}{\rho_y} = 2$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

95/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

ELLISSE D'INERZIA

$$\rho_{max,min} = \sqrt{\frac{I_{max,min}}{A}}$$

$$I_x = 2 \left(\frac{A}{2} \cdot \rho^2 \right) = A \cdot \rho^2$$

Ellisse d'inerzia → **Luogo degli estremi dei raggi giratori**

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

96/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

LE PROPRIETA' GEOMETRICHE IN AUTOCAD

Polilinea → comando: REGIONE → comando: PROPMASS

AUTOCAD

Baricentro: X: 11.25 Y: 12.50

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

97/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

LE PROPRIETA' GEOMETRICHE IN AUTOCAD

Ellisse d'inerzia rispetto agli assi principali centrali → $\rho_{max,min} = \sqrt{\frac{I_{max,min}}{A}}$

AUTOCAD

Momenti di inerzia: X: 46250.00 Y: 36562.50

Raggi di girazione: X: 8.78 Y: 7.81

Momenti principali e direzione X-Y rispetto al baricentro: I: 58962.66 lungo [0.80 0.60] J: 23849.84 lungo [-0.60 0.80]

$\rho_{max} = \sqrt{\frac{58962,66}{600}} = 9,9 \text{ mm}$

$\rho_{min} = \sqrt{\frac{23849,84}{600}} = 6,3 \text{ mm}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

98/95

LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- Geometria delle aree**

LE PROPRIETA' GEOMETRICHE IN AUTOCAD

Polilinea → comando: REGIONE → comando: PROPMASS

AUTOCAD

Momenti di inerzia: X: 0.15 Y: 0.15

Raggi di girazione: X: 0.43 Y: 0.43

Momenti principali e direzione X-Y rispetto al baricentro: I: 0.06 lungo [0.71 -0.71] J: 0.24 lungo [0.71 0.71]

$\rho_{max} = \sqrt{\frac{0,24}{0,82}} = 0,54 \text{ cm}$

$\rho_{min} = \sqrt{\frac{0,06}{0,82}} = 0,27 \text{ cm}$

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

100/95

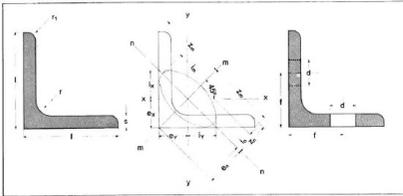
LEZIONE 1

- Geometria
- Velocità, accelerazione
- La gravità
- Forze e coppie
- Equilibrio
- Vincoli
- **Geometria delle aree**

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

Lecco 16/03/2017

LE PROPRIETA' GEOMETRICHE IN AUTOCAD



ANGOLARI a lati uguali spigoli tondi
UNI 5783-66

ITALSIDER
Profilario

designazione profilo	dimensioni				A cm ²	p kg/m	U m ² /m	posizione del baricentro			
	l mm	s mm	r mm	r ₁ mm				e _x =e _y cm	e _x cm	z _m cm	z _n cm
15 × 3	15	3	3,5	2	0,819	0,640	0,057	0,472	0,668	1,06	0,522
20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,860	0,077	0,596	0,843	1,41	0,700
20 × 4	20	4	3,5	2	1,45	1,14	0,077	0,635	0,899	1,41	0,716

valori statici relativi agli assi										(*) foratura sulle ali		designazione profilo
xx-yy		mm				nn				d	f	
J _x =J _y cm ⁴	W _x =W _y cm ³	I _x =I _y cm ⁴	J _{xy} cm ⁴	W _{xy} cm ³	I _{xx} cm ⁴	J _{xy} cm ⁴	W _{xx} cm ³	I _{yy} cm ⁴	J _{xy} cm ⁴	d	f	
0,150	0,150	0,430	0,240	0,220	0,540	0,060	0,100	0,280	0,090			15 × 3
0,390	0,280	0,590	0,610	0,430	0,710	0,160	0,190	0,380	0,240			20 × 3
0,490	0,360	0,580	0,760	0,540	0,730	0,210	0,230	0,380	0,290			20 × 4

101/95

Ordine degli Ingegneri di Lecco

CORSO DI AGGIORNAMENTO PROFESSIONALE

«PROGETTARE EDIFICI IN ZONA SISMICA»

MODULO M1

FINE! (PER ORA....)

Francesco BIASIOLI
Stefano ROSTAGNO

ipogea Associati –Torino
ipogea.ass@gmail.com

Lecco 16/03/2017