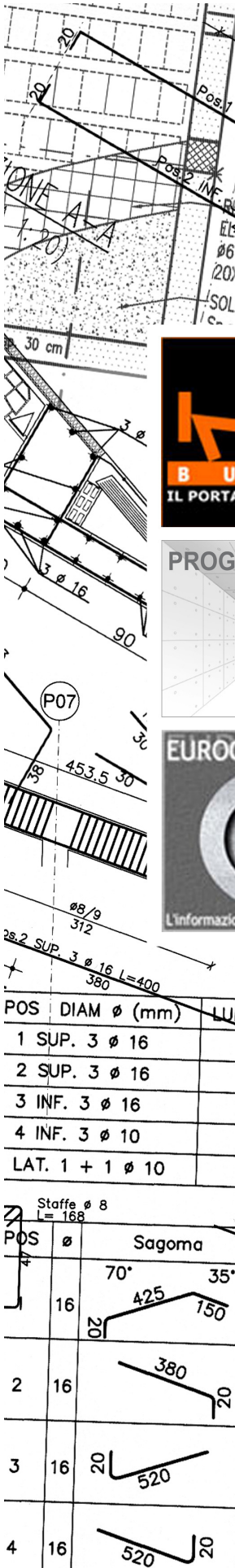


da un'iniziativa
 INFOBUILD + Progetto AUTO_C.A. + EUROCONCRETE
 IN DISTRIBUZIONE GRATUITA



na iniziativa una iniziativa una



POS	DIAM Ø (mm)	LUN
1 SUP.	3 Ø 16	
2 SUP.	3 Ø 16	
3 INF.	3 Ø 16	
4 INF.	3 Ø 10	
LAT. 1 + 1 Ø 10		

POS	Ø	Sagoma
1	16	70° 35° 425 150 20
2	16	380 20
3	16	20 520
4	16	520 20

EDIFICI IN C.A. E LE FORZE ORIZZONTALI

Prof. Francesco BIASIOLI

"Progettare" la regolarità strutturale

Lo sviluppo di un progetto strutturale è sempre un processo iterativo: sulla base dell'esperienza e dei vincoli imposti dal progetto generale il progettista seleziona i materiali, definisce la geometria di primo tentativo delle sezioni, stima le sollecitazioni, verifica le sezioni più significative ed eventualmente ne modifica la geometria. Il processo si ripete fino alle scelte definitive.

Nel caso delle strutture iperstatiche, l'entità delle sollecitazioni dipende sia dalle caratteristiche meccaniche che da quelle geometriche degli elementi e del complesso strutturale: in particolare per le strutture "in parallelo" - la maggior parte delle strutture correnti - l'entità delle sollecitazioni dipende dai rapporti tra le rigidità degli elementi che le compongono. Elementi più "rigidi" tendono ad assorbire quote maggiori delle azioni dunque sono più sollecitati e potrebbero richiedere un aumento delle dimensioni, con aumento della rigidità e di conseguenza delle sollecitazioni; una sorta di ciclo chiuso che può portare a soluzioni non ottimali.

In presenza di forze orizzontali (vento o sisma), anche il modello di analisi è influenzato dalle caratteristiche geometriche e meccaniche del complesso strutturale. Ad esempio, per le strutture in zona sismica, le Norme Tecniche richiedono che l'analisi delle sollecitazioni sia sviluppata tenendo conto, in modo più o meno ampio, dei modi di vibrare del complesso strutturale e della fessurazione degli elementi.

L'interazione tra modello della struttura e sollecitazioni può essere dunque complessa, ma il progettista può cercare di "governarla" adottando schemi di comportamento dell'insieme strutturale il più possibile semplici e chiaramente definiti. Dovrebbero essere presenti specifici sistemi di controvento per il trasferimento dei carichi orizzontali - negli edifici ai nuclei ascensore e eventuali setti - lasciando ai telai formati dai pilastri e dalle travi di piano il compito di trasferire i carichi verticali alle fondazioni. Non basta, peraltro, predisporre controventi in numero e con geometrie adeguate: questi devono anche avere una disposizione planimetrica tale da contenere gli spostamenti di piano, da cui dipendono le sollecitazioni dei diversi sistemi resistenti, dunque, in definitiva, la sicurezza dell'opera. Per tale motivo le Norme evidenziano il concetto di "regolarità strutturale", che non significa necessariamente "simmetria" di configurazione planimetrica e di disposizione in pianta degli elementi resistenti. E' possibile realizzare strutture con ottimo comportamento alle azioni orizzontali a "pianta libera", prive di disposizioni simmetriche, a patto che si seguano in fase di progettazione alcune regole.

Scopo delle note che seguono, e del programma basato su di esse, è proprio quello di fornire ai progettisti tali regole e uno strumento di facile uso che, a partire solo dalla geometria e dalla disposizione in pianta degli elementi verticali di un edificio (pilastri, nuclei, setti), sia in grado di evidenziare fin dalla fase iniziale del progetto eventuali carenze di impostazione. Con tale strumento, che opera in un ambiente grafico molto diffuso tra i Progettisti, speriamo di contribuire, a facilitare il dialogo tra due mondi troppo spesso separati, quello degli architetti e quello degli ingegneri. Un dialogo che deve essere proficuo e in assenza del quale i risultati che si ottengono sono spesso insoddisfacenti.



Francesco Biasioli

Torino, giugno 2009

Ringraziamenti

Il testo è un estratto del Quaderno Tecnico 0, parte di una serie di pubblicazioni di supporto ai corsi di aggiornamento sulle Norme Tecniche 2008 e gli Eurocodici. All'interno di tali corsi viene utilizzato il programma "Ellisse delle rigidità", sviluppato in ambito AUTOCAD grazie alla disponibilità della società Setec, responsabile del progetto "Auto_CA" per la messa a punto di un programma per il disegno delle carpenterie e armature delle strutture di calcestruzzo armato. Alla fase di messa a punto e prova hanno dato validi contributi gli ingg. C. Doimo, M. Raviolo e P. Rossi. La distribuzione e diffusione è possibile grazie alla disponibilità di Auto-CA ed Euroconcrete - l'informazione per l'ingegneria civile. Il programma è scaricabili liberamente dai siti: www.auto-ca.it e www.euroconcrete.it.

1. Le forze orizzontali sugli edifici¹

Gli edifici devono essere sempre progettati per un insieme anche minimo di forze orizzontali indotte da:

- eventuali non verticalità di travi e pilastri, oppure
- l'azione del vento, oppure
- l'azione sismica.

Tranne nei casi più semplici – ad es. negli edifici di altezza limitata - tali forze devono essere assorbite da un complesso di elementi detti “di controvento” – nuclei scale/ascensori o setti – presenti in quantità adeguata e disposti in modo da minimizzare gli eventuali effetti torsionali delle forze sul complesso strutturale. Tali elementi di controvento sono essenziali per “stabilizzare” il complesso strutturale.

2. Il dimensionamento dei controventi

EC2 5.8.3.3 Nelle strutture controventate i telai possono essere **a nodi fissi** o **a nodi mobili**. Un telaio è definito **a nodi fissi** se, nel calcolo dei suoi pilastri, è lecito trascurare gli effetti dovuti a non linearità geometrica (eccessiva deformabilità degli elementi) e/o meccanica (comportamento non lineare dei materiali); in caso contrario il telaio è classificato come **a nodi mobili**.

E' sempre possibile realizzare strutture i cui telai siano a nodi fissi predisponendo elementi di controvento in quantità adeguata: in tal modo si limitano le dimensioni dei pilastri e si individuano due distinte strutture di trasferimento dei carichi, i telai per i carichi verticali, i controventi per i carichi orizzontali.

NT 4.1.2.1.7.2 Secondo le NT e l'EC2 In un edificio in cui gli elementi di controvento sono distribuiti planimetricamente in modo da limitare gli effetti torsionali dovuti alle forze orizzontali, i telai controventati possono essere considerati a nodi fissi se la rigidezza flessionale complessiva ($\sum E_{cd} I_c/L$) dei controventi soddisfa in ciascuna di due direzioni ortogonali la condizione

$$F_{V,Ed} = k_1 \frac{n_s}{n_s + 1,6} \frac{\sum E_{cd} I_c}{L^2} \quad [2.1]$$

Nella [2.1] i termini indicano:

- n_s numero di piani dell'edificio che possono muoversi nel piano orizzontale ($s = \text{“storey”}$, piano)
- L altezza totale dell'edificio (m) misurata dal vincolo alla base degli elementi di controvento
- $F_{V,Ed}$ carico verticale totale (kN) allo SLU agente sugli elementi controventati e di controvento; nella stima di $F_{V,Ed}$ i carichi vanno assunti fissi e senza riduzione ai piani
- E_{cd} valore di progetto del modulo elastico del calcestruzzo (kN/m^2):² $E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{c,E}} = \frac{22 [(f_{ck} + 8)/10]^{2/3}}{\gamma_{c,E}}$
- I_c momento d'inerzia della sezione degli elementi di controvento (m^4)
- k_1 coefficiente che ha valore $k_1 = 0,31$ se si assume che allo stato limite ultimo gli elementi di controvento siano fessurati, $k_1 = 0,62$ se li si assume come non fessurati: si ammette cioè che l'inerzia della sezione fessurata sia il 50% di quella della sezione non fessurata.

La [2.1] definisce la minima inerzia flessionale complessiva ($\sum I_c$) secondo ciascuna direzione ortogonale di un insieme di elementi di controvento realizzati con calcestruzzo di resistenza f_{ck} :

$$\sum I_c = \frac{F_{V,Ed} L^2}{k_1 E_{cd}} \left(1 + \frac{1,6}{n_s} \right) \quad [2.2]$$

L'inerzia flessionale complessiva minima ($\sum I_c$) deve essere disponibile secondo entrambe le direzioni principali dell'edificio.

¹ Nel seguito con NT ed EC2 si indicano i riferimenti ai punti specifici delle Norme Tecniche 2008 e degli Eurocodici.

² Nella formula f_{ck} va espresso in N/mm^2 . Per l'Italia $f_{ck} = 0,83 R_{ck}$. L'Eurocodice suggerisce di adottare il valore $\gamma_{c,E} = 1,20$.

3. Il modello di solaio rigido e gli spostamenti di piano

Perché un sistema di controventi risulti efficace le strutture di controvento devono essere 1) presenti in quantità adeguata e 2) disposte planimetricamente in modo da limitare gli effetti torsionali sul complesso strutturale. Occorre dunque poter valutare l'efficacia della disposizione in pianta di tali elementi.

Per tale scopo si può adottare un modello semplificato che consideri solo il primo solaio di un edificio che può presentare spostamenti e rotazioni per effetto di un insieme di forze orizzontali applicate ai piani di un complesso strutturale. Tale solaio, assunto come infinitamente rigido nel suo piano dunque indeformabile, collega le estremità superiori di una serie di elementi verticali (pilastri, setti e nuclei - fig. 3.1) considerati incastrati alle estremità opposte. Si assume che i lati di tutti gli elementi siano paralleli ai lati del solaio.

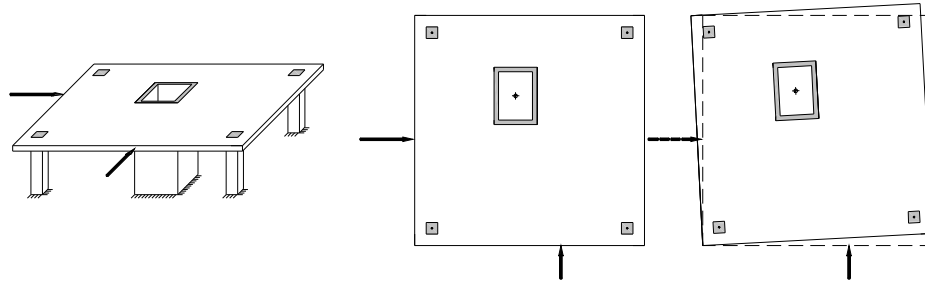


Fig. 3.1 - Modello di solaio

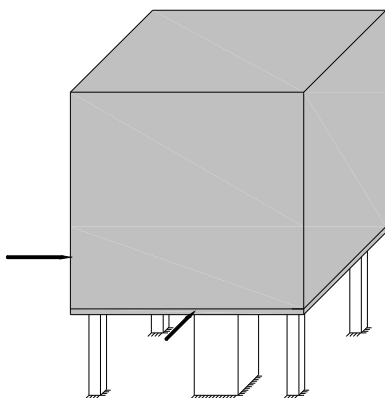


Fig. 3.2 - Modello di edificio

La parte di edificio soprastante il solaio è trattata come un unico corpo rigido che si muove seguendo il movimento del primo solaio (fig. 3.2). Stante tale approssimazione il modello fornisce indicazioni sufficientemente precise solo per edifici "regolari" in pianta e in altezza; nel caso di edifici alti o privi di regolarità strutturale il modello fornisce risultati che possono essere fortemente approssimati, ma è comunque in grado di evidenziare grossolane criticità nella disposizione planimetrica degli elementi di controvento.

Un solaio infinitamente rigido soggetto a un sistema di forze orizzontali agenti nel suo piano e comunque orientate si sposta e ruota. Con riferimento a un sistema di riferimento (x,y) con origine in un punto O qualsiasi, interno o esterno al solaio, gli spostamenti nelle direzioni x e y e la rotazione del solaio attorno all'origine O sono individuati da tre grandezze: u_0 , v_0 e θ (fig. 3.3).

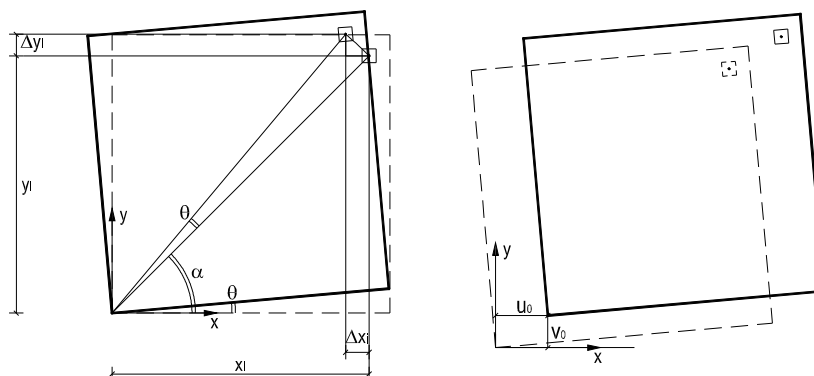


Fig. 3.3 - Componenti dello spostamento

Indicando con α l'angolo che, prima della rotazione, il segmento di lunghezza r congiungente l'estremità di un elemento di coordinate (x_i, y_i) con l'origine O fa con l'asse x , a rotazione avvenuta valgono le relazioni trigonometriche (fig. 3.3, sinistra):

$$\Delta x_i = r \cos(\alpha + \theta) - r \cos \alpha = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta - r \cos \alpha$$

$$\Delta y_i = r \sin(\alpha + \theta) - r \sin \alpha = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta - r \sin \alpha$$

Dato che la rotazione di piano θ è molto piccola si possono porre $\sin \theta = \theta$ e $\cos \theta = 1$. Sostituendo:

$$\Delta x_i = - (r \sin \alpha) \theta = - y_i \theta$$

$$\Delta y_i = (r \cos \alpha) \theta = x_i \theta$$

Sommando a tali incrementi gli spostamenti rigidi di piano u_0 e v_0 (fig. 3.3 destra) si ottengono gli spostamenti totali:

$$u_i = u_0 + \Delta x_i = u_0 - \theta y_i \qquad v_i = v_0 + \Delta y_i = v_0 + \theta x_i \qquad [3.1]$$

Lo spostamento "globale" δ_i dell'estremità dell'elemento i -esimo, le cui componenti sono (u_i, v_i) , vale:

$$\delta_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \qquad [3.2]$$

4. Le rigidezze degli elementi strutturali

All'estremità superiore di un elemento che subisce spostamenti u_i e v_i e una rotazione θ nascono forze e coppie di reazione che, all'annullarsi dell'azione che ha provocato lo spostamento, tendono a riportare l'elemento nella sua posizione originale. In figura 4.1 sono evidenziate le forze reattive all'estremità di due pilastri. Tali forze sono proporzionali alla rigidezza a flessione e taglio di ciascun elemento, le coppie di reazione dovute a una rotazione del piano sono proporzionali alla rigidezza torsionale.³

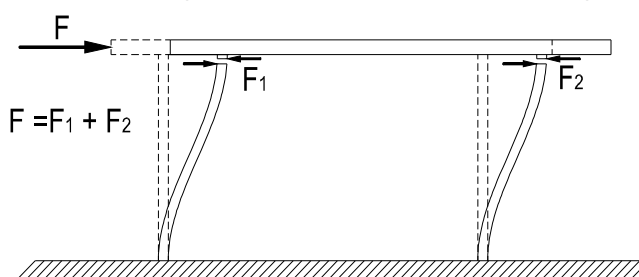


Fig. 4.1– Forze attive e reattive

RIGIDEZZE A FLESSIONE E TAGLIO

Negli edifici sono presenti elementi di controvento – i setti e i vani ascensore – che si assumono incastrati in fondazione o sui muri perimetrali di un piano interrato, e altri elementi – i pilastri di piano – collegati alle travi dei piani superiori e inferiori dei telai. Se tali travi sono considerate infinitamente rigide, le estremità dei pilastri non possono ruotare; se non c'è una rotazione del piano rigido setti, vani ascensore e pilastri sono obbligati agli stessi spostamenti ma si deformano in modo diverso: i setti e i vani ascensore come mensole di altezza pari all'altezza d'edificio, i pilastri come elementi di altezza pari all'interpiano.

L'effetto del solaio rigido è simulato in figura 4.2 da una biella inestensibile che collega un setto con un generico telaio, e dalle presenza di travi di piano indeformate. Sia gli elementi di controvento che i pilastri si deformano per flessione e taglio e la forza reattiva che sviluppano dipende dalla rigidezza a flessione e taglio di ciascun elemento, rigidezza che si può ricavare se è nota la sua "deformabilità globale".

Si consideri la parte libera di muoversi di un edificio in cui sono presenti n_s impalcati (s = "storey", piano) con altezza di piano "l" costante. Gli impalcati sono assunti infinitamente rigidi nel loro piano e liberi di spostarsi nel piano sotto l'effetto di un insieme di forze orizzontali. Il complesso strutturale è formata da una serie di setti e telai orientati secondo due direzioni ortogonali.

³ In meccanica le rigidezze assiale K_z , flessionale K_ϕ e torsionale K_T di una molla sono la forza F_z la coppia M_x e la coppia M_z da applicare alle estremità della molla per ottenere, rispettivamente uno spostamento relativo δ , una rotazione relativa ϕ o una rotazione relativa θ di valore unitario. L'inverso di ciascuna rigidezza è detta "flessibilità", definita come lo spostamento o la rotazione relativa provocate da una forza o da una coppia di valore unitario. La rigidezza k_i di un elemento di controvento o di un pilastro che si deforma per flessione e taglio

$$F_i = k_i \delta_i$$

è pari alla forza che provoca uno spostamento relativo $\delta_i = 1$ delle estremità dell'elemento.

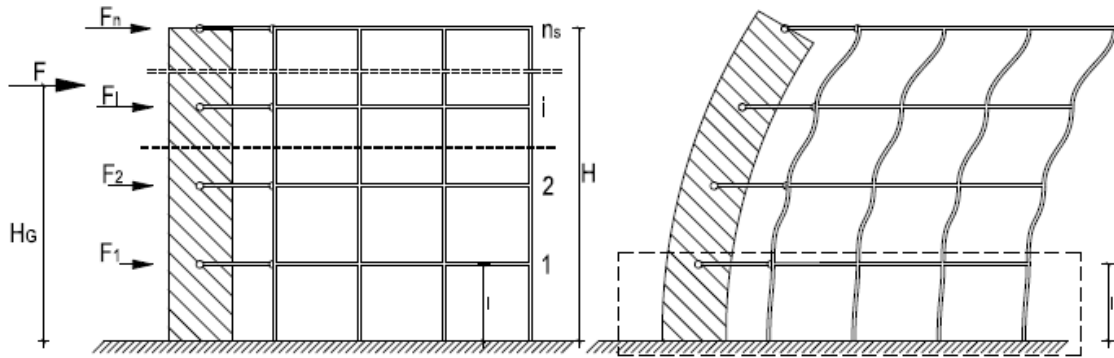


Fig. 4,2 – Deformate di elementi di controvento e di pilastri

Si considerano due elementi generici, un nucleo/setto e un telaio, entrambi incastrati alla base e collegati tra loro da una biella infinitamente rigida che li obbliga a spostamenti uguali nel piano orizzontale (fig. 02A:01)..

NUCLEI E SETTI

Un generico setto o un nucleo di altezza H pari all'altezza totale dell'edificio libera di muoversi ha, nella direzione di massima rigidezza, schema statico di mensola ed è soggetto, a livello del primo impalcato libero di muoversi, alla risultante F delle forze orizzontali F_i che agiscono sul setto/nucleo a tutti i piani, e al momento di trasporto M di tali forze a livello del primo impalcato. I diagrammi delle sollecitazioni di momento e taglio sono riportati in fig. 4.3.

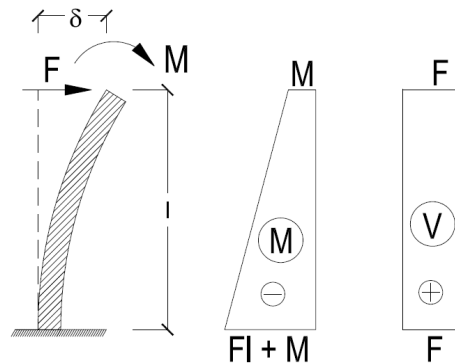


Figura 4.3 – Deformate di interpiano – mensola

In analogia all'ipotesi di ripartizione delle forze adottata per le costruzioni in zona sismica si assume che le forze F_i crescano proporzionalmente con l'altezza. Nel caso di vento e per costruzioni non eccessivamente alte tale ipotesi aumenta il momento M, dunque è a favore di sicurezza.

Detta $z_i = (i l)$ con $i = 0 \dots n_s$ la distanza dell'impalcato i-esimo dal vincolo di base per cui è $i = 0$ risulta:

$$F_i = k z_i = k i l$$

La distanza del baricentro del sistema di forze F_i dal vincolo di base vale:

$$H_G = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} = \frac{\sum (k i l)(i l)}{\sum (k i l)} = l \frac{\sum_0^{n_s} i^2}{\sum_0^{n_s} i}$$

Essendo $\sum_0^{n_s} i = \frac{n_s (n_s + 1)}{2}$ $\sum_0^{n_s} i^2 = \frac{n_s (n_s + 1)(2 n_s + 1)}{6}$ risulta $\frac{\sum_0^{n_s} i^2}{\sum_0^{n_s} i} = \frac{2 n_s + 1}{3}$

Il momento M nella sezione dell'elemento immediatamente al di sotto dell'impalcato i-esimo (fig.4.2) vale:

$$M = F(H_G - il) = Fl \left(\frac{2 n_s + 1}{3} - i \right) \quad i \leq H_G / l$$

La relazione precedente vale solo se $(H_G - il) \geq 0$. Ponendo $i = 1$ si ottiene lo spostamento totale della sezione di estremità della mensola al di sotto del primo impalcato. Tale spostamento è somma degli spostamenti per flessione δ_M e taglio δ_V :

$$\delta = \delta_M + \delta_V = \left[\frac{Fl^3}{3 E \beta_{in} J} + \frac{M l^2}{2 E \beta J} + \frac{Fl}{G A_V} \right] = F \cdot \left[\frac{l^3}{3 E \beta_{in} J} + \frac{\left(\frac{2 n_s + 1}{3} - 1 \right) l^3}{2 E \beta_{in} J} + t \frac{l}{G A} \right]$$

J, A, l momento d'inerzia baricentrico, area della sezione trasversale e lunghezza dell'elemento
 β_{in} rapporto tra i momenti di inerzia della sezione lorda di calcestruzzo fessurata e non fessurata
 A_V area "efficace" a taglio della sezione trasversale di area A: $A_V = A/t$
 t "fattore di taglio" della sezione - $t \geq 1$
 E, G moduli di elasticità longitudinale e tangenziale del materiale: $G = E/[2(1+\nu)]$ in cui il coefficiente di Poisson ν vale $\nu = 0,20$ per calcestruzzo non fessurato e $\nu = 0$ per calcestruzzo fessurato.

Ponendo $F = 1$ il termine entro parentesi rappresenta la "flessibilità globale" dell'elemento, somma di due addendi di cui i primi due sono la flessibilità a flessione, il terzo la flessibilità a taglio.

Posto $J = A\rho^2$ con ρ raggio di inerzia della sezione nella direzione della forza F, invertendo la "flessibilità globale" si ottiene la "rigidezza globale" dell'elemento:

$$k = \frac{1}{\left[\frac{l^3}{E \beta_{in} J} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{2 n_s}{3} + \frac{1}{3} - 1 \right) + t \frac{2(1+\nu) l}{E A} \right]} = \frac{\beta_{in} E A}{l} \frac{1}{\left[\frac{n_s}{3} \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 + 2 \beta_{in} t (1+\nu) \right]}$$

Nella formula la "rigidezza assiale" $[EA/l]$ risulta moltiplicata dal termine $\beta_{in} < 1$ che tiene conto della riduzione d'inerzia della sezione dovuta alla fessurazione, e divisa dai termini della parentesi a denominatore, di cui il primo dipende dal numero dei piani n_s e dalla snellezza (l/ρ) del setto/nucleo nella direzione in cui si intende valutare la rigidezza, il secondo per un materiale (coefficiente ν) e un'area a taglio $A_V = A/t$ assegnati ha valore costante.⁴

Il "peso relativo" di ciascuno dei due addendi sul totale dipende dal rapporto (l/ρ) . Per una mensola snella è $l \gg \rho$ dunque il primo termine in parentesi è molto maggiore del secondo: nel calcolo della rigidezza la deformabilità a taglio è dunque trascurabile. Se viceversa la mensola modella una parete con dimensione massima in pianta maggiore della sua altezza di piano l, come avviene ad esempio per i muri portanti in laterizio, i due termini sono entrambi piccoli e dello stesso ordine di grandezza e la deformabilità a taglio assume particolare rilevanza.

Per sezioni rettangolari di lati b_x, b_y nelle direzioni X e Y sono $A = b_x b_y \quad \rho_{x,y} = \frac{b_{y,x}}{\sqrt{12}} \quad t = \frac{6}{5}$

Per sezioni circolari di raggio r $A = \pi r^2 \quad \rho = \frac{r}{2} \quad t = \frac{10}{9}$

Per i nuclei ascensore A è l'area della sezione trasversale di tutto il nucleo, $\rho = \sqrt{(J/A)}$ è il raggio giratore con J momento d'inerzia baricentrico della sezione calcolato per l'asse ortogonale alla direzione per cui si calcola la rigidezza; il fattore di taglio $t = A/A_V$ è il rapporto tra l'area totale A e l'area "efficace" a taglio A_V dei setti del nucleo disposti nella direzione in cui si valuta la rigidezza.

PILASTRI

Qualsiasi pilastro appartenente a un telaio con lunghezza pari all'altezza di interpiano soggetto allo spostamento relativo δ delle estremità presenta una deformata antisimmetrica (fig. 4.4). In corrispondenza dell'asse di simmetria orizzontale a metà altezza si ha un punto di flesso dove la curvatura della linea elastica si inverte. In un punto di flesso il raggio di curvatura ρ ha valore infinito dunque, stante la

⁴: Ad es. il valore è 2,88 per una sezione rettangolare ($t = 1,20$) di calcestruzzo non fessurato ($\nu = 0,20, \beta_{in} = 1,0$).

relazione in campo elastico ($1/\rho = M/EJ$) tra curvatura $1/\rho$ e momento M , il momento flettente M hanno valore nullo. Per l'antisimmetria della deformazione lo spostamento orizzontale della sezione di mezzeria è metà dello spostamento relativo δ delle estremità: "tagliando" l'elemento nella sezione di simmetria in cui è $M = 0$ l'unica forza che si trasferisce è il taglio $V = F$ che agisce su una mensola incastrata di luce $l/2$. Si ottiene:

$$\frac{\delta}{2} = \delta_F + \delta_V = \left[\frac{(l/2)^3}{3 \beta_{in} EJ} + t \frac{l/2}{GA} \right] \cdot F$$

$$k = \frac{\beta_{in} EA}{l} \frac{1}{\left[\frac{1}{12} \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 + 2 \beta_{in} t (1+\nu) \right]}$$

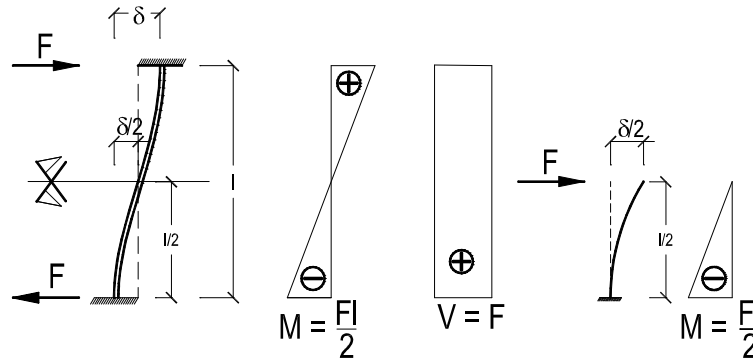


Fig. 4.4 – Deformate di interpiano – pilastro

Le espressioni di k nei due casi differiscono solo per il coefficiente che, nella parentesi a denominatore, moltiplica la snellezza (l/ρ). Si può adottare la formula generale:

$$k = \frac{\beta_{in} EA}{l} \frac{1}{\left[\alpha \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 + 2 t (1+\nu) \right]}$$

in cui il valore del coefficiente α dipende dal tipo di elemento - pilastro o setto. Valgono:

$$\alpha = \frac{n_s}{3} \quad \text{per nuclei o per setti nella direzione di massima rigidità}$$

$$\alpha = \frac{1}{12} \quad \text{per pilastri o per setti nella direzione di minima rigidità}$$

Mentre per i nuclei, elementi bidimensionali, si è soliti considerare sempre la rigidità in entrambe le direzioni, il Progettista può decidere se considerare o meno la rigidità di un setto o un pilastro nella direzione perpendicolare alla direzione della forza applicata. In particolare si deve considerare la rigidità di un pilastro in una direzione solo esso fa parte di un telaio in tale direzione: se non esiste telaio, la rigidità del pilastro si può assumere pari a zero.

SEZIONI FESSURATE

Le sezioni di un elemento verticale possono essere considerate come fessurate ($\beta_{in} < 1$, $\nu = 0$) oppure non fessurate ($\beta_{in} = 1$, $\nu = 0,20$). Per tener conto del comportamento elasto plastico degli elementi sotto azioni sismiche, le NT e l'EC8 suggeriscono di adottare l'ipotesi di sezioni fessurate ($\nu = 0$) assumendo nel modello una frazione dell'inerzia della sezione lorda di solo calcestruzzo. Per stimare il coefficiente $\beta_{in} < 1$ alcuni autori⁵ suggeriscono valori funzione della forza assiale adimensionale allo SLU $\nu = N_{Ed} / (A_c f_{cd})$ nella combinazione di carico QP (tabella 4.5). Per valori non indicati si può interpolare linearmente tra i valori in tabella.

⁵ Paulay, Priestley, Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings, J Wiley & son., London, 1992, (§4.1.3)

Elemento	β_{in}	val. raccomandato
Elementi compressi con $\nu > 0,5$	$0,70 < \beta_{in} \leq 0,90$	0,80
Elementi compressi con $\nu = 0,2$	$0,50 < \beta_{in} \leq 0,70$	0,60
Elementi tesi con $\nu = - 0,05$	$0,30 < \beta_{in} \leq 0,50$	0,40

Tab. 4.5 – Rapporti tra momento di inerzia "efficace" e della sezione lorda di cls

RIGIDENZE TORSIONALI

La rotazione θ del solaio mobilita la rigidità torsionale di tutti gli elementi le cui estremità sono rigidamente collegate al solaio. La rigidità torsionale – la coppia T_z da applicare all'estremità libera di un elemento di lunghezza l incastrato alla base per ottenere una rotazione θ unitaria - ha espressione diversa a seconda che l'elemento abbia sezione piena (pilastri e setti) o a parete sottile (nuclei ascensore). Nel secondo caso la rigidità torsionale inoltre varia se la forma della sezione a parete sottile è aperta (sezione a C) o chiusa (sezione anulare).

La sezione d'estremità di un elemento di lunghezza l incastrato alla base sollecitato all'estremità libera da una coppia di momento T_z ruota dell'angolo (fig. 4.6):

$$\theta = \frac{T_z l}{GJ_t}$$

Ponendo $\theta = 1$ si ottiene la RIGIDEZZA TORSIONALE $k_\theta = \frac{GJ_t}{l}$

Nella formula il momento di inerzia torsionale J_t vale:

- per sezioni circolari piene di raggio r $J_t = J_p = \pi r^4/2$
- per sezioni rettangolari di dimensioni a e b con $a > b$:

$$J_t = \frac{a b^3}{\beta} \quad \beta = \frac{3}{1 - 0,63 b/a} \quad \text{tende al valore 3 se } a > 10 b$$

- per sezioni che possono essere suddivise in rettangoli di dimensioni $(a_i b_i)$ con $a_i > b_i$ si sommano i contributi dei rettangoli cercando la suddivisione che rende massimo il momento J_t :

$$J_t = \sum \frac{a_i b_i^3}{\beta_i} \quad \beta_i = \frac{3}{1 - 0,63 b_i/a_i}$$

- per sezioni anulari chiuse con pareti di spessore costante s la cui "linea media" posta a distanza $s/2$ dai bordi ha lunghezza u e racchiude l'area Ω :

$$J_t = 4 \Omega^2 \frac{s}{u}$$

E' importante peraltro ricordare che, come e più della rigidità flessionale, la rigidità torsionale di un setto o pilastro di calcestruzzo è ridotta dall'effetto della fessurazione, mentre una certa rigidità rimane disponibile anche dopo fessurazione nel caso di elementi a nucleo.

5. Il centro di taglio delle sezioni a profilo aperto

Per gli elementi con sezione a profilo aperto sia le caratteristiche di sollecitazione che tutte le caratteristiche geometriche delle sezione trasversali (momenti di inerzia flessionali e torsionali, da cui dipendono le rigidità) vanno riferite al "centro di taglio", un punto della sezione diverso dal baricentro. Per tale punto passa la risultante delle tensioni tangenziali presenti sulla sezione per effetto di una sollecitazione di taglio la cui retta d'azione passa per il baricentro della sezione. Se la sezione è dotata di un asse di simmetria, il centro di taglio si trova su tale asse, se ha due assi di simmetria, il centro di taglio coincide con il baricentro. Se la sezione ha forma di L, il centro di taglio è all'incrocio degli assi delle due ali, se ha forma di T è all'incrocio degli assi dell'ala e dell'anima.

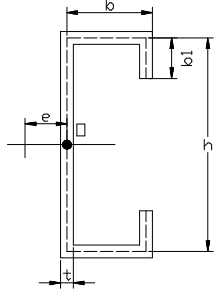


Fig. 5.1 – Centro di taglio

In una sezione a parete sottile a forma di C simmetrica rispetto a un asse orizzontale posto a metà altezza dell'anima verticale, il centro di taglio dista dall'asse dell'anima verticale della quantità (fig. 5.1):

$$e = b \frac{3h^2b + 6h^2b_1 - 8b_1^3}{h^3 + 6h^2b + 6h^2b_1 + 8b_1^3 + 12hb_1^2}$$

Per sezione a C senza risvolti è $b_1 = 0$.

Il centro di taglio è il punto rispetto al quale si devono calcolare tutte le caratteristiche di sollecitazione, ed anche il punto attorno a cui la sezione ruota se soggetta a torsione (centro di torsione).

Spostamenti e rotazione di piano

Un solaio infinitamente rigido che collega una serie di elementi verticali (pilastri, setti, nuclei ascensore) incastrati al piede, soggetto a un sistema di forze orizzontali (dovute a non verticalità dell'edificio, oppure vento o sisma) comunque dirette si sposta e ruota nel piano. Si ammette che tutti gli elementi verticali abbiano lati paralleli alle direzioni degli assi coordinati (fig. 6.1) e siano indeformabili assialmente: il piano deformato dunque non presenta spostamenti in direzione verticale

Con riferimento a un sistema di riferimento (x,y) con origine in un qualsiasi punto del piano (fig. 6.1):

- le grandezze u_0 , v_0 e θ sono gli spostamenti dell'origine O secondo x e y e la rotazione del piano;
- le grandezze X, Y e M sono le componenti della risultante F del sistema di forze e il momento risultante del sistema rispetto all'origine O;
- le grandezze F_{xi} , F_{yi} e M_{Ti} sono le reazioni interne parallele alle direzioni x,y e il momento che nascono alle estremità dell'elemento i-esimo rappresentate in figura 6.1,

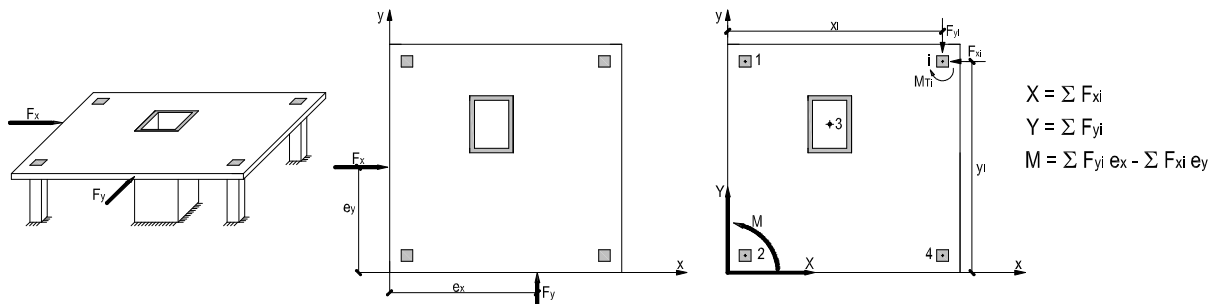


Fig. 6.1 - Risultante del sistema di forze

Gli spostamenti del centro di taglio di un elemento verticale i-esimo di coordinate x_i e y_i

$$u_i = u_0 - \theta y_i \quad v_i = v_0 + \theta x_i$$

fanno nascere all'estremità dell'elemento le forze di reazione F_{xi} e F_{yi} , legate alle rigidità a flessione e taglio dell'elemento secondo le direzioni x,y:

$$F_{xi} = k_{xi} u_i = k_{xi} (u_0 - \theta y_i) \quad F_{yi} = k_{yi} v_i = k_{yi} (v_0 + \theta x_i) \quad [6.1a]$$

La rotazione θ fa nascere nell'elemento i-esimo il momento torcente di reazione M_{Ti} legato alla rigidità torsionale $k_{\theta,i}$ dell'elemento:

$$M_{Ti} = k_{\theta,i} \theta \quad [6.1b]$$

Il sistema delle forze reattive interne (F_{xi} , F_{yi} , M_{Ti}), equilibra il sistema di forze esterne F (X, Y, M). Considerando le direzioni positive delle forze e dei momenti come in figura le equazioni di equilibrio sono:

alla traslazione secondo X $\sum F_{xi} = \sum k_{xi} (u_0 - \theta y_i) = X$

alla traslazione secondo Y $\sum F_{yi} = \sum k_{yi} (v_0 + \theta x_i) = Y$

alla rotazione risp. a O $-\sum F_{xi} y_i + \sum F_{yi} x_i + \sum M_{Ti} = -\sum k_{xi} (u_0 - \theta y_i) y_i + \sum k_{yi} (v_0 + \theta x_i) x_i + \sum k_{\theta,i} \theta = M$

Raccogliendo i termini ed esplicitando nelle tre equazioni tutte le incognite, anche quelle i cui coefficienti sono nulli, si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tre incognite u_0 , v_0 e θ :

$$\begin{aligned} (\sum k_{xi}) u_0 \quad [+ 0 v_0] \quad - (\sum k_{xi} y_i) \theta &= X \\ [+ 0 u_0] \quad + (\sum k_{yi}) v_0 \quad + (\sum k_{yi} x_i) \theta &= Y \\ - (\sum k_{xi} y_i) u_0 \quad + (\sum k_{yi} x_i) v_0 \quad + (\sum k_{yi} x_i^2 + \sum k_{xi} y_i^2 + \sum k_{\theta i}) \theta &= M \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} K_x = \sum k_{xi} \quad K_y = \sum k_{yi} \quad &\text{somma delle rigidezze nelle direzioni x e y} \\ S_{kx} = \sum k_{xi} y_i \quad S_{ky} = \sum k_{yi} x_i \quad &\text{momenti statici delle rigidezze nelle direzioni x e y rispetto agli assi} \\ K_T = \sum k_{yi} x_i^2 + \sum k_{xi} y_i^2 + \sum k_{\theta i} \quad &\text{somma momenti del secondo ordine delle rigidezze rispetto agli assi e} \\ &\text{delle rigidezze torsionali proprie} \end{aligned}$$

si ottiene⁶

$$\begin{aligned} K_x u_0 \quad [+ 0 v_0] \quad - S_{kx} \theta &= X \\ [+ 0 u_0] \quad + K_y v_0 \quad + S_{ky} \theta &= Y \\ - S_{kx} u_0 \quad + S_{ky} v_0 \quad + K_T \theta &= M \end{aligned}$$

Le tre equazioni diventano disaccoppiate, cioè ciascuna equazione fornisce un'incognita, se tutti i termini simmetrici rispetto alla "diagonale principale" si annullano. Tali termini sono i momenti statici S_{kx} e S_{ky} delle rigidezze in direzione x e y rispetto agli assi coordinati: per annullarli è dunque sufficiente che l'origine O del sistema di riferimento sia posta nel BARICENTRO DELLE RIGIDEZZE o CENTRO DI TAGLIO del sistema, le cui coordinate nel sistema originale sono:

$$x_k = \frac{S_{ky}}{K_y} = \frac{\sum k_{yi} x_i}{\sum k_{yi}} \quad y_k = \frac{S_{kx}}{K_x} = \frac{\sum k_{xi} y_i}{\sum k_{xi}}$$

A tale nuova origine vanno ovviamente riportate tutte le forze agenti, modificando di conseguenza il momento di trasporto M che assume il valore \underline{M} . In tale riferimento le tre incognite valgono

$$u_0 = \frac{X}{K_x} \quad v_0 = \frac{Y}{K_y} \quad \theta_0 = \frac{M}{K_T} \quad [6.2]$$

In base alle [6.1] e [6.2] le forze reattive su ciascun elemento risultano:

$$\begin{aligned} F_{x,i} = k_{x,i} (u_0 - \theta_0 y_i) &= X \frac{k_{x,i}}{K_x} - \frac{M}{K_T} \frac{y_i}{K_T} \\ F_{y,i} = k_{y,i} (v_0 + \theta_0 x_i) &= Y \frac{k_{y,i}}{K_y} + \frac{M}{K_T} \frac{x_i}{K_T} \end{aligned} \quad [6.3]$$

Nelle [6.3] le coordinate x_i e y_i sono riferite al nuovo sistema di riferimento centrato sul baricentro CR. Le [6.3] evidenziano che le forze che sollecitano ciascun elemento hanno una parte proporzionale al "peso" delle rigidezze traslazionale nelle direzioni x,y rispetto alla rigidezza totale corrispondente, a cui si somma l'effetto del momento \underline{M} , proporzionale alla distanza di ciascun elemento dal baricentro delle rigidezze. Tali effetti torsionali sono pertanto massimi per gli elementi più distanti dal baricentro delle rigidezze.

Se la risultante del sistema di forze F passa per il baricentro delle rigidezze è $\underline{M} = 0$ dunque $\theta = 0$: i punti del piano si spostano tutti nelle direzioni x,y delle quantità:

$$u_i = u_0 = \frac{X}{K_x} \quad v_i = v_0 = \frac{Y}{K_y}$$

Se la risultante del sistema di forze F passa per il baricentro delle rigidezze è $\underline{M} = 0$ (dunque $\theta = 0$) tutti i punti del piano si spostano tutti nelle direzioni x,y delle quantità:

⁶ La matrice dei coefficienti delle incognite ha i termini simmetrici rispetto alla diagonale principale uguali e i termini della diagonale principale tutti positivi: tali condizioni garantiscono che per un assegnato sistema di forze (X,Y,M) esiste un'unica soluzione ($u_0 v_0 \theta$).

$$u_i = u_0 = \frac{X}{K_x} \qquad v_i = v_0 = \frac{Y}{K_y}$$

Se il sistema di forze si riduce a una coppia (cioè se $X = Y = 0$ ma $M \neq 0$) risultano $u_0 = v_0 = 0$ e $\theta \neq 0$. Gli spostamenti dei punti del piano valgono:

$$u_i = -\theta_0 y_i = -\frac{M}{K_T} y_i \qquad v_i = \theta_0 x_i = \frac{M}{K_T} x_i$$

Il baricentro delle rigidezze CR ha coordinate (0,0) dunque per esso risultano $u = v = 0$. Esso è dunque il solo punto che non si sposta quando il piano è soggetto a torsione, dunque è il punto intorno a cui ruota il piano. Il baricentro delle rigidezze è dunque anche il CENTRO DI TORSIONE del sistema.⁷

7 La regolarità strutturale e l'ellisse delle rigidezze

Per edifici soggetti a forze orizzontali gli elementi di controvento devono avere disposizione planimetrica tale da minimizzare gli effetti torsionali delle forze orizzontali. Solo se l'edificio presenta “regolarità strutturale in pianta”, cioè se la retta d'azione delle forze orizzontali non dista in modo significativo dal baricentro delle rigidezze CR degli elementi verticali il momento torsionale M e i relativi spostamenti sono poco significativi e la struttura è considerata dotata di rigidezza torsionale adeguata.

Nella valutazione della rigidezza torsionale dei nuclei il modello approssimato considera le sezioni aperte come formate da pareti rettangolari “sottili” e non tiene conto di fenomeni come l'ingobbamento impedito delle sezioni di estremità che possono aumentare notevolmente la rigidezza torsionale. Nel caso di nuclei aperti (sezioni a C, a L e a T o comunque prive di due assi di simmetria) le rigidezze si considerano applicate nel centro di taglio della sezione.

Calcolati i valori delle rigidezze traslazionale di tutti gli elementi e la rigidezza totale si classifica il sistema strutturale in base a come risulta suddivisa la rigidezza totale tra gli elementi resistenti (tab. 7.1). In base al rapporto tra la rigidezza traslazionale degli elementi di controvento primari P (nuclei e setti) e la rigidezza totale T (nuclei, setti e elementi secondari S – tipicamente i pilastri) il sistema può essere classificato come sistema misto a telaio/pareti equivalente a pareti, oppure a pareti (tab. 7.1).

rigidezze	u.d.m.	pilastri	controv.	totale	controv totale	valori di confronto per sistema	
						misto equiv. pareti	a pareti
k_x e k_y	$\text{kN/m} \cdot 10^3$	S	P	$P + S = T$	C/T %	> 50%	> 65%

Tab. 7.1 – Classificazione dei sistemi strutturali

Per la regolarità strutturale, un edificio può essere classificato come regolare o non regolare in altezza e/o in pianta. Una struttura regolare contrasta con efficacia l'azione delle forze orizzontali, presenta minor aleatorietà di comportamento e può essere studiata con modelli di calcolo semplificati. La verifica della regolarità strutturale (sempre obbligatoria in zona sismica) permette dunque di convalidare sia le ipotesi semplificative assunte nella modellazione della struttura che i procedimenti d'analisi.

Regolarità in altezza

3274 4.3/4.3.1
EC8 4.2.3

Per la valutazione della regolarità in altezza si può fare riferimento alle prescrizioni dell'Ordinanza 3274 integrate dalle prescrizioni dell'Eurocodice 8: un edificio è **regolare in altezza** se sono rispettate **tutte** le seguenti condizioni:

- i sistemi resistenti verticali dell'edificio (quali telai e pareti) si estendono per tutta l'altezza dell'edificio;
- masse e rigidezze rimangono costanti o si riducono gradualmente, senza bruschi cambiamenti, dalla base alla cima dell'edificio (le variazioni da un piano all'altro non devono superare il 20%);

⁷ La coincidenza tra centro di taglio e centro di torsione può anche essere dimostrata con il teorema di Betti - Maxwell.

- il rapporto tra la resistenza effettiva e la resistenza richiesta dal calcolo non è significativamente diverso ai diversi piani (il rapporto calcolato a un generico piano non deve differire più del 20% dall'analogo rapporto determinato per un altro piano);
- eventuali restringimenti della sezione dell'edificio avvengono in modo graduale: ad ogni piano il rientro non supera il 30% della dimensione corrispondente al primo piano, né il 10% della dimensione corrispondente al piano immediatamente sottostante.
- per una singola rientranza più bassa del 15% dell'altezza dell'elemento strutturale principale, la rientranza deve essere minore del 50% della precedente dimensione in pianta. In questo caso la base dentro la proiezione verticale del perimetro dei piani superiori deve essere progettata per resistere almeno il 75% delle forze di taglio orizzontali che si svilupperebbero in quella zona in una struttura simile senza l'allargamento alla base;

In figura 7.2 sono evidenziati i criteri di regolarità in altezza:

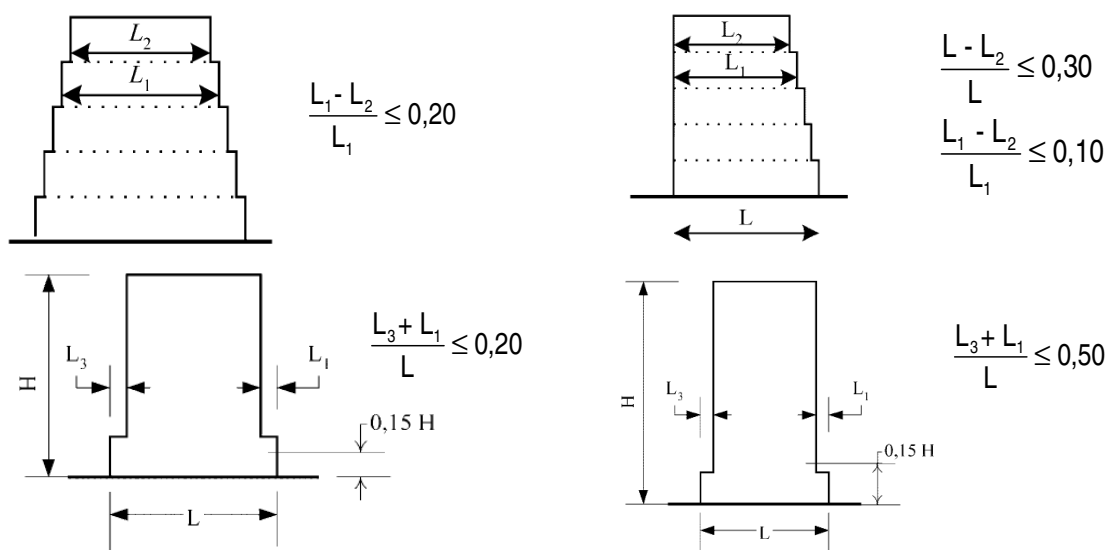


Fig. 7.2 – Regolarità in altezza (EC8)

Regolarità in pianta

La [6.1] evidenzia come qualsiasi rotazione θ , amplificando gli spostamenti di piano u_i e v_i in modo direttamente proporzionale alla distanza di ogni elemento dall'origine del sistema di coordinate, di conseguenza aumentano le forze e i momenti reattivi che sollecitano l'elemento. Per minimizzare la rotazione θ in base alla [6.2] occorre:

- ridurre M , avvicinando il più possibile il baricentro delle rigidità CR alle rette d' azione delle forze esterne (al centro di massa CM nel caso del sisma);
- aumentare K_T , posizionando gli elementi di elevata rigidità il più possibile distanti da CR .

Le NT e l'EC8 prescrivono entrambi tali accorgimenti. Per ridurre gli effetti torsionali infatti vengono definiti i "raggi torsionali" degli elementi di controvento nelle direzioni y e x che, per quanto definito al punto 6. non dipendono dal modulo E del materiale:⁸

$$r_x = \sqrt{\frac{K_T}{K_y}} \quad r_y = \sqrt{\frac{K_T}{K_x}} \quad [7.1]$$

⁸ I raggi torsionali hanno significato affine a quello dei raggi di inerzia polari calcolati come radice quadrata del quoziente tra la somma dei momenti di secondo ordine delle forze e la risultante delle forze.

Viene introdotto il raggio di inerzia polare I_s delle masse di piano che, assumendo le distanze d_i rispetto al baricentro delle masse CM, vale:

$$I_s = \sqrt{\frac{\sum m_i d_i^2}{\sum m_i}} \quad [7.2a]$$

In via semplificata, per edifici regolari in altezza in cui le masse e le posizioni delle masse non variano da piano a piano, si possono utilizzare, al posto delle masse, le forze assiali presenti nei pilastri. Nel caso di un piano a pianta rettangolare di dimensioni totali L e B su cui le masse m siano uniformemente distribuita, il raggio di inerzia polare I_s delle masse si ricava dall'espressione:

$$I_s = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12}} \quad [7.2.b]$$

Per garantire un valore minimo di K_T , **NT ed EC8 richiedono che sia verificata la condizione:**

$$r_x, r_y \geq \alpha I_s \quad \text{con } \alpha = 0,80 \text{ per le NT e } \alpha = 1,0 \text{ per l'EC8} \quad [7.3]$$

Per ridurre il valore di M_T , calcolate le distanze e_{0x} , e_{0y} tra le rette d'azione delle forze esterne (o il centro di massa CM nel caso del sisma) e il baricentro delle rigidezze CR

$$e_{0x} = X_{CM} - X_{CR} \quad e_{0y} = Y_{CM} - Y_{CR} \quad [7.4]$$

NT ed EC8 richiedono che sia verificata la condizione:

$$e_{0x} / r_x \leq 0,30 \quad e_{0y} / r_y \leq 0,30 \quad [7.5]$$

NT 7.4.3.1

Secondo le NT se ad ogni piano è verificata la [7.3], la struttura non è torsionalmente deformabile; se è verificata anche la [7.5], secondo l'EC8 (la prescrizione non è ripetuta nelle NT) gli effetti torsionali legati all'eccentricità tra CR e CM sono limitati e l'edificio è classificabile come regolare in pianta.⁹ Le prescrizioni di norma tendono dunque entrambe a minimizzare l'angolo di rotazione θ : la [7.3] imponendo un valore minimo di K_T , la [7.5] riducendo M.

Perché siano soddisfatte sia la [7.3] che la [7.5] occorre che nella [7.1]:

- le rigidezze K_x e K_y abbiano valori molto simili;
- la rigidezza K_T sia la più grande possibile: ciò si ottiene disponendo gli elementi di controvento il più lontano possibile dal baricentro CR;
- le eccentricità e_{0x} , e_{0y} siano le più piccole possibile, dunque CR sia il più vicino possibile a CM.

Calcolate le coordinate del baricentro delle rigidezze CR e i raggi torsionali r_x , r_y , è possibile dare delle [7.3] e [7.5] una semplice rappresentazione geometrica se si traccia, per un sistema di riferimento ortogonale (x y) con origine nel baricentro CR, un'ellisse i cui semiassi $a = r_x$ e $b = r_y$ sono i raggi torsionali [7.1]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{K_T/K_y} + \frac{y^2}{K_T/K_x} = 1 \quad [7.6]$$

Per tracciare l'ellisse è sufficiente conoscere solo la geometria e la posizione degli elementi di controvento: se tutti gli elementi hanno uguale lunghezza l, sono sufficienti area, raggio giratore e posizione del baricentro o del centro di taglio di ciascun elemento. In figura 7.3 è rappresentata a linea continua l'ellisse di rigidezza di un solaio al variare della tipologie degli elementi di controvento. Il solaio ha due parti a mensola ed è sollecitato da una forza F agente in direzione y la cui retta d'azione passa per il baricentro del solaio.

⁹ Secondo l'EC8 perché la struttura sia non deformabile torsionalmente deve essere $r_x, r_y \geq I_s$: la prescrizione delle NT è pertanto meno severa di quella dell'EC8.

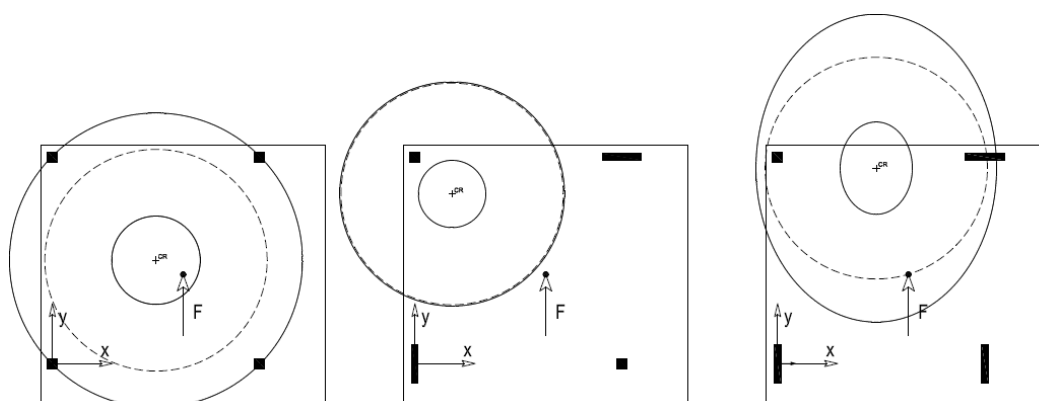


Fig. 7.3 – Ellisse delle rigidezze

L'ellisse evidenzia come sono distribuite le rigidezze intorno al baricentro delle rigidezze CR. La condizione [7.3] definisce la dimensione MINIMA di ciascun asse dell'ellisse, la [7.5] identifica un'area interna all'ellisse e con la stessa forma di questa entro la quale devono passare le rette d'azione delle forze esterne o trovarsi, nel caso di sisma, il centro di massa CM.

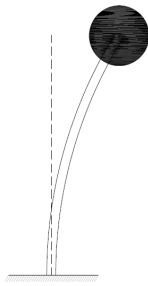
Nella figura di sinistra i quattro elementi pilastri hanno tutti dimensioni, dunque rigidezze nelle direzioni x e y, uguali tra loro e sono disposti simmetricamente rispetto a un sistema d'assi ortogonale la cui origine individua il baricentro delle rigidezze CR: poiché $K_x = K_y$ l'ellisse è un cerchio avente raggio maggiore del raggio ($0,80 I_s$) del cerchio di riferimento. La retta d'azione della forza F pur passando per il baricentro del solaio, distinto dal baricentro CR, è all'interno del nocciolo di raggio ($0,30 r_x$): tutte le condizioni] sono soddisfatte, gli elementi hanno rigidezze sufficiente, la struttura di controvento è torsionalmente adeguata e il complesso può essere classificato come "regolare in pianta". Ovviamente gli spostamenti complessivi possono non essere accettabili, ma la regolarità è garantita.

Nella figura al centro due elementi, uno in direzione x e uno in direzione y, aumentano di dimensione e di conseguenza aumenta la rigidezze traslazionale totale. Il baricentro CR dell'ellisse si sposta molto vicino al punto di incontro delle rette d'azione degli elementi con rigidezze maggiore. L'ellisse mantiene la forma di cerchio perché continua ad essere $K_x = K_y$ ma si riduce di dimensione perché se da un lato aumentano le rigidezze totali K_x e K_y , dall'altro non aumenta in proporzione la rigidezze K_T dato che le direzioni secondo cui gli elementi presentano maggior rigidezze risultano molto vicine al baricentro CR, punto rispetto al quale viene calcolata K_T . La forza F non passa all'interno del nocciolo dunque la struttura è "torsionalmente deformabile" perché, essendo il baricentro CR il centro di torsione, il solaio ruota attorno al baricentro CR rispetto al quale la forza F presenta una significativa eccentricità.

Nella figura di destra viene aggiunto un elemento uguale ai precedenti con rigidezze traslazionale essenzialmente in direzione y. Il baricentro delle rigidezze trasla di conseguenza verso destra, dunque aumentano la rigidezze torsionale K_T e le dimensioni dell'ellisse ma questa perde la forma di cerchio, essendo $K_y \gg K_x$. L'aumento di rigidezze in una sola direzione è evidenziato, oltre che dallo spostamento del baricentro delle rigidezze CR, dalla riduzione del semiasse dell'ellisse in quella direzione e dal contemporaneo aumento del semiasse nella direzione ortogonale: per l'aumento di K_y il termine K_T aumenta più del termine K_y mentre il termine K_x non cambia. Il raggio r_y – il semiasse "b" dell'ellisse – aumenta mentre il raggio r_x – il semiasse "a" – diminuisce: l'ellisse si "allunga" in direzione y evidenziando un "eccesso" di rigidezze in direzione y. La retta d'azione della forza F rimane all'esterno del "nocciolo", anche se meno che nel caso precedente, la struttura rimane torsionalmente deformabile.

L'ellisse delle rigidezze dunque va interpretato in modo opposto all'ellisse d'inerzia delle sezioni perché un asse allungato in una direzione indica una prevalenza di rigidezze nella stessa direzione: per tendere alla forma di cerchio occorre pertanto o diminuire la rigidezze secondo tale direzione, sempre rispettando la dimensione minima data dalla [7.3], o aumentare la rigidezze secondo la direzione ortogonale.

Si deve tendere a un cerchio in quanto una forma non circolare segnala una struttura che, sotto forze orizzontali, si comporterà in modo diverso nelle due direzioni ortogonali. Il solaio monoplano si può infatti assimilare a un pendolo inverso con massa m in sommità, cioè a un sistema a un grado di libertà.



In un sistema elastico lineare con un grado di libertà di rigidità traslazionale k (fig. 7.4) il periodo T dell'oscillazione libera è proporzionale alla rigidità secondo la relazione.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{con} \quad k = \frac{I^3}{3EJ} \quad [7.7]$$

Se le rigidità del complesso strutturale K_x e K_y sono molto simili tra loro, a parità di massa m i periodi T del sistema di controventi nelle due direzioni x , y sono molto vicini e il complesso strutturale, non avendo un periodo

prevalente, se soggetto a

forze orizzontali si comporterà in modo disaccoppiato nelle direzioni x e y .

Nel progetto dunque si deve tendere a una forma circolare imponendo la condizione $K_x = K_y$.

Oltre che di forma tendenzialmente circolare, l'ellisse deve avere raggi di dimensione minima tale da soddisfare la [7.3]: ciò obbliga, a parità di rigidità K_x e K_y , a disporre gli elementi di controvento in modo da ottenere un adeguato valore di K_T dunque a posizionarli il più lontano possibile dal baricentro CR, preferibilmente sulla “periferia” del solaio.

Ancora, un'ellisse di forma circolare e di superficie adeguata non può avere il centro CR in un punto qualsiasi del solaio, ma deve rispettare la condizione [7.5]: il centro CR e il punto ove si incontrano le rette d'azione delle forze esterne (o il centro di massa CM nel caso del sisma) non devono dunque essere troppo distanti tra loro.

Esaminando forma e dimensioni dell'ellisse si può dunque valutare se:

- i controventi hanno rigidità analoga nelle due direzioni (ellisse che tende al cerchio);
- i controventi sono presenti in quantità sufficiente (ellisse maggiore del cerchio di riferimento);
- i controventi sono disposti in modo planimetricamente corretto (distanze tra CR e le rette d'azione delle forze esterne minori del nocciolo, oppure baricentro CM all'interno del nocciolo).

Le condizioni [7.3] e [7.5], che devono essere rispettate ad ogni piano, sono necessarie a garantire un buon comportamento del complesso strutturale in presenza di forze orizzontali, in particolare un sistema di controventi che garantisca una struttura con ridotta sensibilità agli effetti torsionali, ma non sufficienti in quanto non sono in grado di individuare le quantità di controventi nelle direzioni x e y adeguate ad assorbire le forze orizzontali con spostamenti limitati del complesso strutturale. La [7.2] infatti è legata alle dimensioni di piano ma non tiene in conto dell'altezza in verticale dell'edificio, da cui dipende l'intensità delle forze orizzontali (vento o sisma). Occorre dunque prendere in conto anche altre prescrizioni di norma, legate ai carichi totali che agiscono sul complesso strutturale.

Occorre inoltre sottolineare che il modello è corretto per uno o massimo due piani, significativo fino a 5/6 piani e fortemente approssimato per un numero di piani maggiore. Occorre dunque utilizzarlo per quello che può fornire – un primo giudizio di regolarità, che serva ad evidenziare errori grossolani ma che deve essere confermato da più sofisticati modelli 3D.

8 Procedura "ellisse delle rigidezze" – dati generali e dati geometrici

Gli esempi proposti sono stati svolti utilizzando la procedura "Ellisse delle rigidezze" sviluppata in ambito Autocad™ e Autocad LITE™ nell'ambito del progetto Auto-C.A¹⁰. Il file "Auto_C.A. Free - Setup.exe" installa il programma descritto nel seguito.

Gli elementi verticali (pilastrini, setti, nuclei) possono essere o caricati da un disegno esistente, sovrapponendo un "livello" nuovo e congelando gli altri livelli, oppure disegnati utilizzando esclusivamente "polilinee" o circonferenze. Valgono le seguenti convenzioni di rappresentazione (i colori sono attribuiti automaticamente dal programma):

Pilastrini: circonferenza o polilinea di 4 lati, colore: magenta

Setti: polilinea di 4 lati, colore: ciano

Nuclei ascensore: polilinea di 8 (sezioni a C) o 12 lati (sezioni a C con risvolti); colore: blu.

Selezionando dalla barra dei menù l'icona "Auto-CA free" e "Ellisse delle rigidezze", nella parte sinistra dello schermo si apre il menu rappresentato a lato. Nel menù è possibile definire:

Unità di misura (mm/cm/m) alla quale il programma fa riferimento per il disegno della carpenteria di piano, le dimensioni degli elementi verticali e il calcolo delle caratteristiche geometriche delle sezioni

Altezza h dell'interpiano Il sistema assume che tutti gli elementi abbiano la stessa altezza di interpiano. \bar{U}

Numero n di piani fuori terra: è il numero dei piani liberi di muoversi per effetto del vento o del sisma.

Coefficienti di Poisson ν del calcestruzzo: $\nu = 0,20/0$ per calcestruzzo non fessurato/fessurato

Coefficiente $\beta < 1$ di riduzione delle inerzie flessionali per fessurazione delle sezioni

Fattore di scala SC per il disegno dell'ellisse delle rigidezze: fattore di riduzione delle dimensioni dell'ellisse, da usare per ellissi molto allungate in una direzione.

Si individuano con selezione singola o multipla gli elementi da considerare nel calcolo. Premendo il tasto destro del mouse gli elementi selezionati vengono colorati con le convenzioni sopra indicate. Il pulsante "Elimina dalla selezione" rimuove l'elemento selezionato con il cursore.

Si introduce il **raggio polare I_s** o con il valore calcolato con la formula [7.2a] oppure stimato in base alle dimensioni (L,B) con la formula [7.2b]. Nel secondo caso i valori (L,B) possono essere o introdotti numericamente o selezionati direttamente sul disegno.

Ellisse delle rigidezze

Premendo il pulsante "Genera ellisse delle rigidezze" viene disegnata l'ellisse delle rigidezze e marcata la posizione del centro di taglio CT dei nuclei. L'incrocio degli assi dell'ellisse individua la posizione del baricentro delle rigidezze CR. Selezionando il tipo di rigidezze (torsionale, in direzione x o in direzione y) una scala cromatica fornisce il peso % della rigidezze di ogni elemento sulla rigidezze totale.

¹⁰ Per informazioni sul progetto Auto-CA visitare il sito www.auto-ca.it

Forze esterne

L'utente individua la posizione delle rette di azione delle forze esterne, considerate agenti secondo due assi tra loro ortogonali. Per ciascuna direzione il pulsante "Genera rettangolo di tolleranza" traccia il "nocciolo" dell'ellisse delle rigidezze e un rettangolo che individua la zona di potenziale variabilità delle direzioni delle rette d'azione. Tale rettangolo, secondo le indicazioni delle NT, ha lati di ampiezza pari al 4% (caso non sismico) o al 5% (caso sismico) della dimensione massima del solaio nella direzione perpendicolare alla direzione di ciascuna forza. Il rettangolo, evidenziato in colore, dovrebbe sempre risultare interno al nocciolo.

9 Procedura "ellisse delle rigidezze" – esempi

In tutti gli esempi le quote sono in cm, il solaio ha dimensioni (1600 x 600) cm, i setti (400 x 30) cm e l'altezza di interpiano è h = 300 cm. Si assume un materiale di modulo di elasticità fittizio E = 1. Le rette d'azione delle forze esterne F coincidono con gli assi di simmetria del solaio.

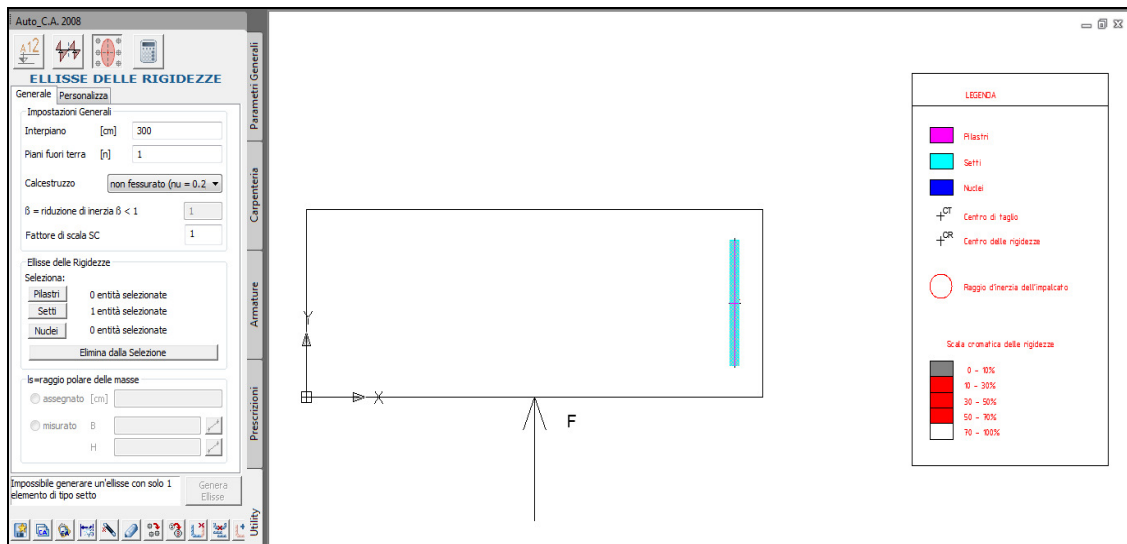
9.1 Controvento singolo

Un setto isolato ha baricentro nel punto di coordinate (1500, 300) rispetto a un sistema di coordinate con origine come in figura. Le caratteristiche geometriche e meccaniche del setto sono riportate in tabella.

rif	dimensioni della sezione		coordinate		altezza	area sezione	inerzie		fattore di taglio		α_x	α_y	β	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$
	b_x	b_y	X_i	Y_i	h	A	I_x	I_y	t_x	t_y							
	[cm]					[cm ²]	[cm ⁴] 10 ⁻³										
S1	30	400	1500.00	300.00	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.080	0.331	1.00	38.9	779.7	100	100

$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i} y_i$	$K_{y,i} x_i$	Coord. rispetto a CR		$K_{t,i}$	$K_{x,i} \frac{y_i^2}{2}$	$K_{y,i} \frac{x_i^2}{2}$	$K_{T,i}$	r_x	r_y
				X_i	Y_i						
[N/cm]		[N]		[mm]		[Nmm/rad]				[cm]	[cm]
38.9	779.7	1166.4	116959	0.00	0.00	0	0	0	0	0	0

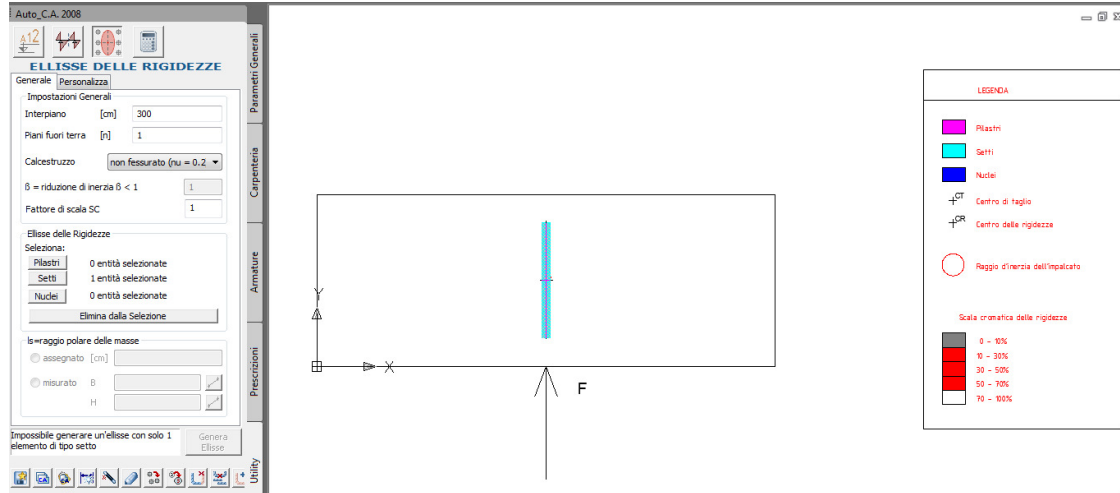
L'ellisse delle rigidezze è tracciata in figura:



Il baricentro delle rigidezze CR coincide con il baricentro geometrico del setto, di conseguenza l'ellisse delle rigidezze non è tracciata perché la rigidezze torsionale K_T dell'elemento, e di conseguenza i raggi dell'ellisse, sono nulli. Il setto sviluppa una forza reattiva posizionato nel baricentro delle rigidezze CR e in direzione opposta a F, dunque sono limitati gli spostamenti in direzione Y dovuti alla forza F agente in verticale ma l'eccentricità delle due forze, attiva e reattiva, genera un momento (orario nel caso di figura). L'unico elemento che sviluppa un momento torcente di reazione è il setto ma, stante la sua modestissima

rigidezza torsionale, questo non è in grado di contrastare efficacemente la rotazione dell' impalcato. Il setto rappresenta di fatto un vincolo semplice per l'impalcato rigido: poiché le forze attive e reattive formano una coppia, l'impalcato rigido può essere considerato labile

Se il setto è centrato sulla retta di azione della forza F l'impalcato è teoricamente in equilibrio per forze dirette secondo la direzione Y ma risulta sensibile a spostamenti anche modesti della posizione della retta d'azione della forza, che secondo le NT devono essere presi in conto mediante le eccentricità aggiuntive.

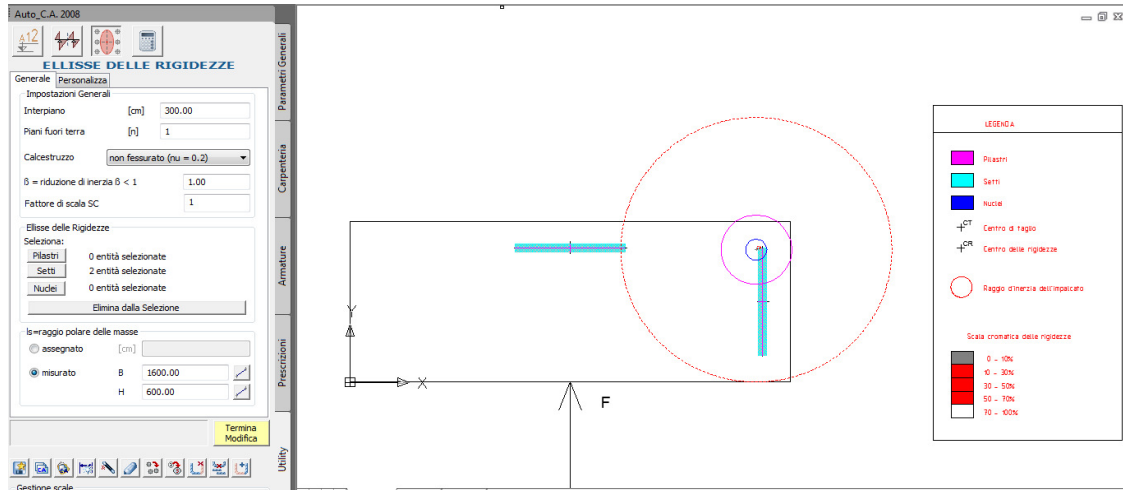


9.2 Coppia di controventi

rif	dimensioni della sezione		coordinate		altezza	area sezione	inerzie		fattore di taglio		α_x	α_y	β	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	
	b_x	b_y	X_i	Y_i	h	A	I_x	I_y	t_x	t_y								
	[cm]						[cm ²]	[cm ⁴] 10 ⁻³						[N/cm]	%	%		
S	1	30	400	1500	300	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.08	0.33	1.00	38.9	779.7	5	95
S	2	400	30	800	500	300	12000	900	160000	1.20	1.20	0.33	0.08	1.00	779.7	38.9	95	5

$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i} y_i$	$K_{y,i} x_i$	Coord. rispetto a CR		$K_{t,i}$	$K_{x,i} y_i^2$	$K_{y,i} x_i^2$	$\underline{K}_{T,i}$	$\underline{K}_{T,i}$	r_x	r_y
				X_i	Y_i							
[N/cm]		[N]		[mm]		[Nmm/rad]				%	[cm]	[cm]
38.9	779.7	1166.4	116959	332.47	-1905.01	0	430	282968	2272864	12	155	155
779.7	38.9	38986.4	3110	-6667.53	94.99	0	4990253	97201	17354948	88		

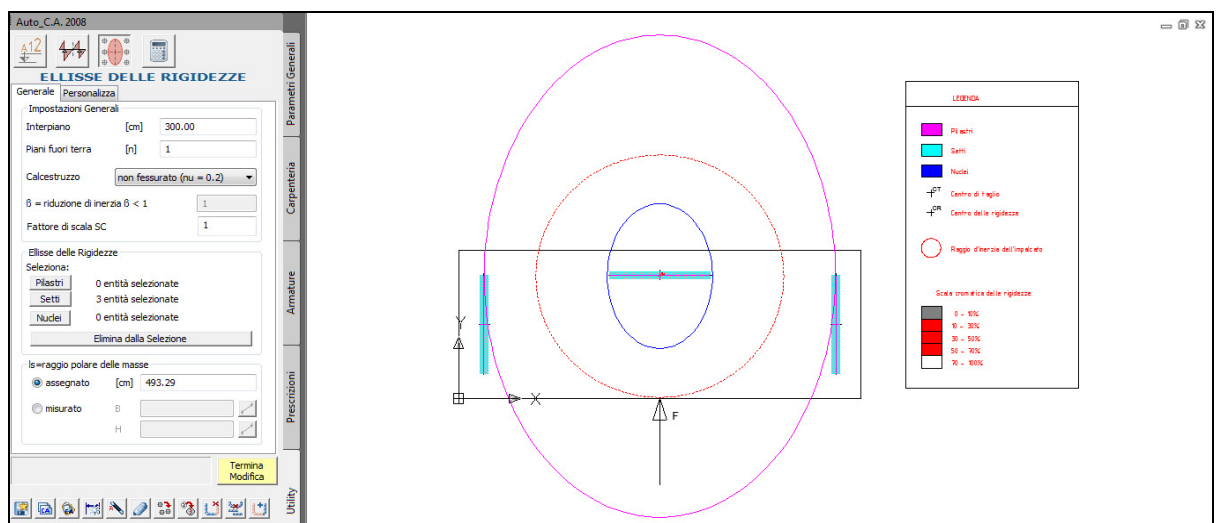
La disposizione ortogonale della coppia di controventi fa sì che il baricentro delle rigidezze sia posizionato nel punto di incontro delle loro direzioni principali. Il sistema è stabile come spostamenti nelle direzioni (x,y) ma fortemente instabile per la rotazione indotta dall'eccentricità della forza agente rispetto al baricentro delle rigidezze CR. La configurazione porta a spostamenti elevati del punto d'angolo diametralmente opposto al baricentro CR: un eventuale pilastro lì posizionato sarebbe soggetto a forze di taglio rilevanti.



9.3 Tre elementi di controvento

rif	dimensioni della sezione		coordinate		altezza	area sezione	inerzie		fattore di taglio		α_x	α_y	β	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$
	b_x	b_y	X_i	Y_i	h	A	I_x	I_y	t_x	t_y							
	[cm]				[cm ²]	[cm ⁴] 10 ⁻³											
S 1	30	400	1500	300	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.08	0.33	1.00	38.9	779.7	5	49
S 2	400	30	800	500	300	12000	900	160000	1.20	1.20	0.33	0.08	1.00	779.7	38.9	91	2
S 3	30	400	100	300	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.08	0.33	1.00	38.9	779.7	5	49

$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i} y_i$	$K_{y,i} x_i$	Coord. rispetto a CR		$K_{t,i}$	$K_{x,i} y_i^2$	$K_{y,i} x_i^2$	$\underline{K}_{T,i}$	$\underline{K}_{T,i}$	r_x	r_y
				X_i	Y_i							
[N/cm]		[N]		[mm]		[Nmm/rad]				%	[cm]	
38.9	779.7	1166.4	116959	7000.00	-1818.63	0	190513	257889	383352211	50	693	946
779.7	38.9	38986.4	3110	0.00	181.37	0	4990253	97201	256487	0		
38.9	779.7	1166.4	7797	-7000.00	-1818.63	0	3888	701754	383352211	50		



Rispetto al caso precedente la situazione migliora perché la simmetria degli elementi di controvento nella direzione Y sposta e "centra" l'ellisse delle rigidzze rispetto alla pianta dell'impalcato. La struttura rimane

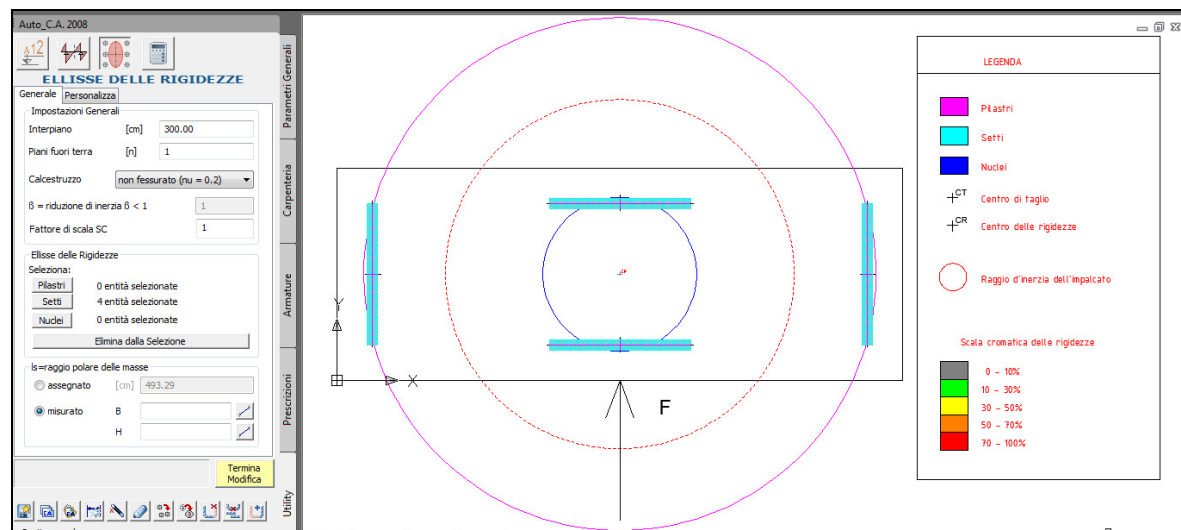
comunque sensibile a forze agenti in direzione x agenti nel baricentro del piano, data la posizione fortemente eccentrica di tale punto rispetto al baricentro CR. La forma allungata dell'ellisse evidenzia un eccesso di rigidità in direzione Y.

9.4 Quattro elementi di controvento

rif	dimensioni della sezione		coordinate		altezza	area sezione	inerzie		fattore di taglio		α_x	α_y	β	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	
	b_x	b_y	X_i	Y_i	h	A	I_x	I_y	t_x	t_y								
	[cm]					[cm ²]	[cm ⁴] 10 ⁻³											[N/cm]
S	1	30	400	1500	300	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.08	0.33	1.00	38.9	779.7	2	48
S	2	400	30	800	500	300	12000	900	160000	1.20	1.20	0.33	0.08	1.00	779.7	38.9	48	2
S	3	30	400	100	300	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.08	0.33	1.00	38.9	779.7	2	48
S	4	400	30	800	100	300	12000	900	160000	1.20	1.20	0.33	0.08	1.00	779.7	38.9	48	2

$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i} y_i$	$K_{y,i} x_i$	Coord. rispetto a CR		$K_{t,i}$	$K_{x,i} y_i^2$	$K_{y,i} x_i^2$	$K_{T,i}$	$K_{T,i}$	r_x	r_y
				X_i	Y_i							
[N/cm]		[N]		[mm]		[Nmm/rad]				%	[cm]	[cm]
38.9	779.7	1166.4	116959	7000.00	0.00	0	190513	0	382066277	46	711	711
779.7	38.9	38986.4	3110	0.00	2000.00	0	4990253	97201	31189084	4		
38.9	779.7	1166.4	7797	-7000.00	0.00	0	3888	701754	382066277	46		
779.7	38.9	7797.3	3110	0.00	-2000.00	0	4990253	3888	31189084	4		

La doppia simmetria, evidenziata da una ellisse circolare, e la dimensione dell'ellisse che supera il cerchio interno di raggio I_s , evidenziano un sistema di controventi adeguato. La retta di azione delle forze esterne, sia in direzione x che in direzione y, passa all'interno del "nocciolo" centrale dunque la distanza tra baricentro delle masse CM e baricentro delle rigidità CR rispetta i valori massimi di norma.

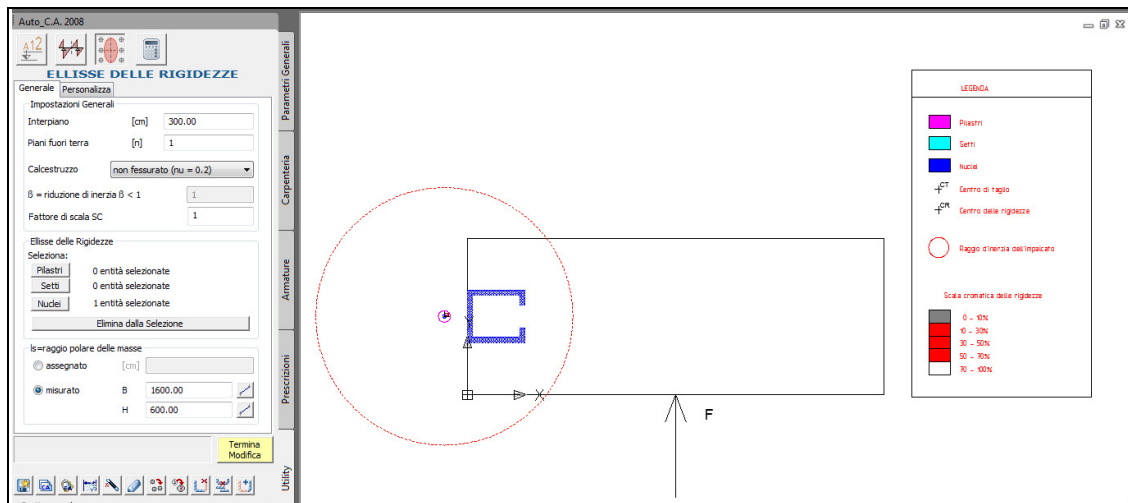


9.5 Nucleo ascensore

rif	dimensioni della sezione		coordinate		altezza	area sezione	inerzie		fattore di taglio		α_x	α_y	β	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	
	b_x	b_y	X_i	Y_i	h	A	I_x	I_y	t_x	t_y								
	[cm]				[cm ²]	[cm ⁴] 10 ⁻³				[N/cm]								%
N	1	0	0	-100	300	300	13400	84012	79229	1.52	2.16	0.33	0.33	1.00	511.7	447.9	100	100

$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i} y_i$	$K_{y,i} x_i$	Coord. rispetto a CR		$K_{t,i}$	$K_{x,i} y_i^2$	$K_{y,i} x_i^2$	$\underline{K}_{T,i}$	$\underline{K}_{T,i}$	r_x	r_y
				X_i	Y_i							
[N/cm]		[N]		[mm]		[Nmm/rad]				%	[cm]	[cm]
511.7	447.9	15352.1	-4479	0.00	0.00	2248148	0	0	224815	100	22	21

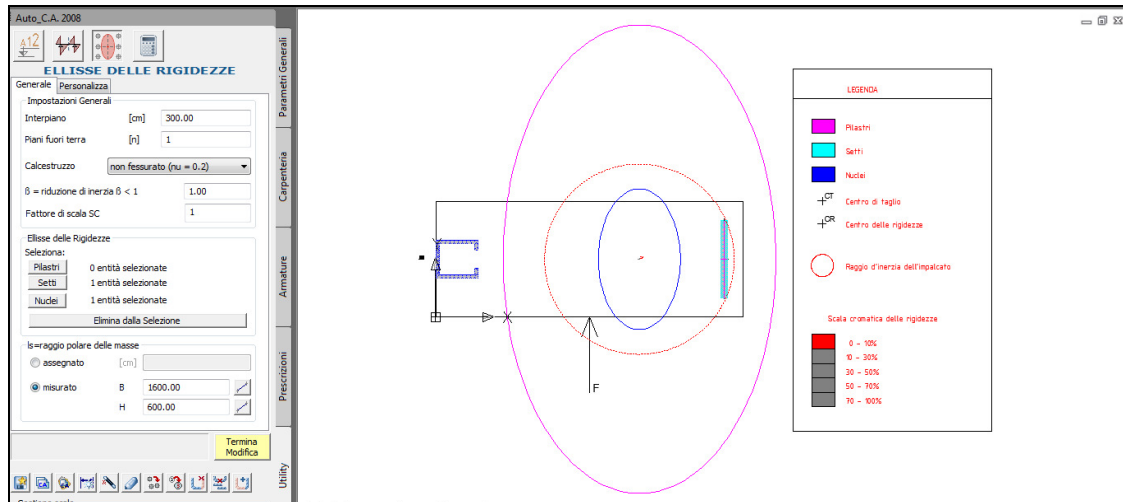
L'ellisse delle rigidezza risulta come in figura: Valgono le considerazioni dell'esempio n. 1.



9.6 Nucleo ascensore +1 setto

rif	dimensioni della sezione		coordinate		altezza	area sezione	inerzie		fattore di taglio		α_x	α_y	β	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	
	b_x	b_y	X_i	Y_i	h	A	I_x	I_y	t_x	t_y								
	[cm]				[cm ²]	[cm ⁴] 10 ⁻³				[N/cm]								%
N	1	0	0	-100	300	300	13400	84012	79229	1.52	2.16	0.33	0.33	1.00	511.7	447.9	93	36
S	1	30	400	1500	300	300	12000	160000	900	1.20	1.20	0.08	0.33	1.00	38.9	779.7	7	64

$K_{x,i}$	$K_{y,i}$	$K_{x,i} y_i$	$K_{y,i} x_i$	Coord. rispetto a CR		$K_{t,i}$	$K_{x,i} y_i^2$	$K_{y,i} x_i^2$	$\underline{K}_{T,i}$	$\underline{K}_{T,i}$	r_x	r_y
				X_i	Y_i							
[N/cm]		[N]		[mm]		[Nmm/rad]				%	[cm]	[cm]
511.7	447.9	15352.1	-4479	-10162.28	0.00	2248148	5284794	0	462794415	64	770	1150
38.9	779.7	1166.4	116959	5837.72	0.00	0	874806	701754	265723127	36		



La situazione, accettabile come posizione ed eccentricità delle forze, evidenzia peraltro eccesso di rigidezza in direzione y: occorre o ridurre la dimensione del setto di destra o disporre due setti simmetrici rispetto a CM in direzione x.